Modelos y métodos para realizar particiones justas

Edgar Alfredo Duéñez Guzmán

20 de junio de 2004

Contenido

1
Introducción

En los últimos 50 años la teoría matemática de las divisiones justas se ha desarrollado enormemente, sin embargo, quizá el primer caso registrado de división justa tiene lugar hace 2800 años, en el que se plantea la solución para dos personas del conocido *uno corta, el otro escoge*. Lo interesante de esta solución es que, dependiendo de la estrategia, puede garantizar que ninguna de las dos personas obtenga menos de la mitad de aquello que se quiera repartir. Fue sólo hace medio siglo que se planteó la existencia de una generalización de esta idea para más de dos personas.

Sólo hace 25 años se comenzó a pensar en la existencia de un punto intermedio entre el ganar y el perder, y más aún, dado que es imposible obtener todo sin que el resto de los implicados no obtengan nada, lo que se desea saber es en cuáles aspectos se va a ganar, en cuales a perder y en cuales se ha de llegar a un acuerdo.

En economía se han abordado estos problemas de manera que los implicados le impongan cierta estructura a su problema. A lo largo de esta tesis, sin embargo, se toman esos problemas ya estructurados y se analizan las posibilidades de que todos los participantes obtengan una asignación justa. Nuestra principal preocupación en esta tesis es con las disputas en las que todos pueden ganar, sea que el problema provenga de una situación real de divorcio, hasta negociación o, incluso, arreglos internacionales como los acontecidos en la Segunda Guerra Mundial.

En el segundo capítulo se presenta un estudio de las corrientes principales de la división justa, así como las diversas formas de abordar problemas de distinta índole y complejidad. En las primeras secciones se brindan las nociones básicas, y se presentan los paradigmas principales de la división justa.

Se continúa, en el segundo capítulo, con los teoremas de existencia, que han impulsado gran parte de los estudios recientes en esta área. Estos teoremas implican la existencia de una solución con diversas propiedades, dadas unas condiciones en general débiles sobre las preferencias de los agentes. Sin embargo no se conoce, en su mayoría, forma de construir las soluciones dadas las preferencias de los agentes. Es por esto que posteriormente se abordan los procedimientos conocidos para garantizar la construcción de una asignación (solución) que tenga las propiedades de justicia deseadas. Se comienza con el estudio de los procedimientos para objetos discretos (alternancia, mejor postor y compensación monetaria y finalmente, el *Ganador Ajustado*). Se cierra el capítulo con los procedimientos para repartir objetos continuos (esquemas de cuchillos móviles).

En el tercer capítulo se presentan las aportaciones de la tesis, el resultado principal consiste en una generalización a n personas del procedimiento del Ganador Ajustado, que es un procedimiento estrictamente para dos personas, que ofrece una solución *de mínima justicia* (ambos obtienen al menos la mitad), *equitativa* (ambos obtienen el mismo porcentaje) y *eficiente* (no se puede mejorar a uno sin empeorar al otro). El deseo de generalizar dicho procedimiento radica en las propiedades de solución justa que tiene. Se ha visto, sin embargo, que las tres características que el procedimiento tiene, no se pueden mantener para cuando se tienen más de dos personas.

Posteriormente se brinda una implementación computacional para resolver el problema generalizado del Ganador Ajustado, dadas las condiciones requeridas por el problema. Se relaciona, además, esta generalización con un objeto matemático importante llamado IPS, descrito por Julius Barbanel, y analizado aquí en la sección 2.3.3, se ofrecen, además, algunos ejemplos. Finalmente cerramos la tesis con conclusiones y comentarios finales.

2

División Justa

Históricamente, la humanidad ha encontrado una enorme diversidad de maneras de repartir objetos o utilidades. Es por esta razón que se ha desarrollado una rama de las matemáticas económicas para intentar formalizar los conceptos de las divisiones justas, y se han logrado axiomatizar varias soluciones.

El primer problema con el que nos encontramos al hablar de división justa es la inexistencia de una definición estricta de justicia. Sin embargo, es posible definir ciertas características de una solución que son consideradas *deseables* en este contexto.

2.1 Conceptos Básicos

Tradicionalmente, el problema de división justa se basa en un conjunto de participantes que tiene como finalidad la repartición de uno o más objetos de tal forma que la asignación resulte satisfactoria para cada uno de los participantes.

La forma de decidir si una solución es o no satisfactoria para los participantes varía dependiendo del enfoque con el que se aborda el problema y de la información disponible.

Se puede suponer que los participantes cuentan con preferencias de comparación a pares (es decir, dados dos objetos, cuál es el que prefiere el agente), o con preferencias más elaboradas, como un porcentaje de deseo sobre el o los objetos, o incluso con una medida de probabilidad dada sobre un conjunto compacto de un espacio real multidimensional.

En todo caso el problema de división justa se puede tipificar de la siguiente manera.

Definición 1 *Dado un conjunto arbitrario N de agentes y un conjunto compacto Δ de $\mathbb{R}^n$ que representa el o los objetos a repartir, decimos que un problema de* división justa *es la pareja (N, Δ).*

Observemos que en la mayoría de los casos, el conjunto N será un conjunto finito, y usualmente será representado por $\{1, 2, ..., n\}$. Este conjunto representa el conjunto de los participantes en la división, de aquí que a N se le llame también el conjunto de agentes o jugadores. Para fines de esta tesis, sin embargo, nos referiremos a él únicamente como el conjunto de agentes, y a cada $i \in N$ como al agente $i-$ésimo.

El concepto de solución, sin embargo, es dependiente del problema que se desea resolver. Para todo conjunto ordenado $F = (F_i \subseteq \Delta : i \in N)$ diremos que F es una *asignación* de Δ a N. De manera usual se le llama *solución* a cualquier asignación de Δ que cumpla con las siguientes dos propiedades:

a) $\cup_{j \in N} F_j = \Delta$

b) $int(F_j) \cap int(F_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$. (2.1)

Cuando tenemos N de cardinalidad finita, estas dos condiciones nos dicen que F es una $n-$partición ordenada de Δ salvo por las fronteras de los conjuntos F_i. En la mayoría de los casos tendremos que la forma de establecer las preferencias de los agentes serán no atómicas (i.e. no existirán conjuntos de medida cero con una preferencia positiva), y por esta razón, la asignación F puede ser convertida en una partición de Δ, dado que para todos los agentes ∂F_i no tendrá ningún valor.

A continuación definiremos una notación que es usada para la definición de soluciones.

Notación 2 *Denominamos por G al conjunto de todo los problemas (N, Δ), y S al conjunto de todas las soluciones F.*

Se le pueden aumentar restricciones al conjunto G de tal manera que sólo consideremos los problemas que deseamos resolver, y de igual forma podemos restringir el espacio de soluciones S que consideraremos como posibles soluciones a nuestro problema de división justa.

Notación 3 *Diremos que $\phi : G \longrightarrow S$ es una* función de solución*. La asignación estará dada por $\phi(N, \Delta) \longmapsto F_{(N,\Delta)}$.*

Observemos que en esta notación no requerimos ninguna propiedad sobre la solución asignada a cada problema. La razón principal es que, como se mencionó anteriormente, la solución es altamente dependiente del problema que deseamos resolver. Por ejemplo, es totalmente distinta una solución del problema de asignación pago de impuestos (en el que cada persona tratará de pagar lo menos posible) a una solución al problema de repartición de utilidades (en el que cada persona desea obtener lo mayor posible).

Por otro lado, para poder cuantificar esta intención de obtener lo mayor o lo menor posible, necesitamos primero definir lo que es una preferencia.

Definición 4 *Para cada $i \in N$ diremos que una relación $\succeq_i \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es una $\sigma-$álgebra común a todos los agentes, es la* preferencia *de i si y sólo si $\succeq_i$ es transitiva y reflexiva. Diremos que i* prefiere *a A sobre B si y sólo si, $(A, B) \in \succeq_i$ o, utilizando la notación usual para relaciones, $A \succeq_i B$.*

Observemos que esta definición sólo requiere la información de preferencia, es decir, dado un par de objetos, se sabe qué objeto es preferido por el agente i, observemos que no necesariamente todos los objetos son comparables. En el caso de objetos finitos, se tiene que todo par de objetos es comparable, pero no cualquier par de conjuntos de objetos lo es. En los casos en los que Δ es finita, se suele utilizar el conjunto 2^Δ como la $\sigma-$álgebra sobre la que se basan las preferencias. Es importante notar que la relación de preferencia no es estricta y por esta razón se le pide que sea reflexiva, y también pedimos que sea transitiva dado que intuitivamente es muy sensato que así sea.

También se utiliza la notación de preferencia estricta $A \succ_i B$ para poder definir cuándo una asignación resulta ser estrictamente mejor para un agente. En este caso la relación no es reflexiva, pero sí es transitiva; además, $A \succ_i B$ implica que $A \succeq_i B$, pero no necesariamente en el otro sentido.

En algunos casos, nos interesa saber más que sólo la preferencia que tiene un agente sobre los subconjuntos de Δ, también nos puede interesar saber con qué vehemencia prefiere el agente i a cada subconjunto. Esto nos lleva a la definición de las *medidas de preferencia* de los agentes.

La medida del agente i es una función de distribución de probabilidad m_i.

Definición 5 *Se dice que una medida es* contablemente aditiva*, si para una familia numerable o finita de conjuntos disjuntos $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se tiene que*

$$m_i(\cup_{j\in\mathbb{N}} B_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} m_i(B_j)$$

Para poder definir de manera formal la no atomicidad de una medida requerimos la medida de Lebesgue, que denotaremos por $\lambda(\cdot)$, esto lo podemos hacer ya que Δ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Para la $\sigma-$álgebra, tomaremos a los Borelianos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 6 *Se dice que una medida es* no atómica *si y sólo si, para todo* $B \subset \Delta$ *tal que* $\lambda(B) = 0$, *se tiene que* $m_i(B) = 0$.

Usualmente se requiere que la medida m_i de i sea contablemente aditiva y no atómica. Esto es porque se desea que los trozos de medida cero sean de valor cero para todos los agentes, ya que, si recordamos la definición de una solución, requerimos que los interiores fueran disjuntos (2.1).

Para finalizar esta sección, observemos que cuando se tiene una medida, se pueden definir las preferencias del agente i a partir de la medida de i. Diremos que $A \succeq_i B$ si y sólo si $m_i(A) \geq m_i(B)$, y de forma análoga, $A \succ_i B$ si y sólo si $m_i(A) > m_i(B)$. Es importante notar que no todas las preferencias se pueden representar con medidas.

2.1.1 Propiedades de las soluciones

A continuación analizaremos las propiedades que se suelen pedir a las soluciones para ser consideradas como justas. Es importante notar que algunas de estas definiciones dependen de la forma en que estén dadas las preferencias.

En todas las siguientes definiciones está dado un problema (N, Δ).

Definición 7 *Decimos que una solución* F *es* libre de envidias *si y sólo para cada* $i \in N$ *se tiene que* $F_i \succeq_i F_j$ *para toda* $j \in N$.

Esto quiere decir que una solución libre de envidias es simplemente aquella en la que cada agente considera que recibe, en su preferencia, el mejor de los trozos en los que se dividió Δ.

Definición 8 *Decimos que una solución* F *es* eficiente *si y sólo si para toda solución* E *se tiene que* $F_i \succ_i E_i$.

Definición 9 *Decimos que una solución* F *es* óptima de Pareto *si y sólo si no existe otra solución* E, *tal que* $E_i \succeq_i F_i$ *para cada* $i \in N$ *con al menos una de las preferencias anteriores siendo estrictas.*

Claramente optimalidad de Pareto implica eficiencia. Observemos, también, que en las dos definiciones anteriores no tomamos en cuenta la opinión del agente acerca del resto de la asignación como en el caso de libre de envidias, sino que sólo nos interesa que el agente no empeore en el caso de optimalidad de Pareto y que mejore en el caso de eficiencia para otra solución dada.

Definición 10 *Diremos que la solución* F Pareto-domina *a la solución* E *si y sólo si se tiene que* $F_i \succeq_i E_i$ *para toda* $i \in N$ *con al menos una de las preferencias siendo estricta.*

De esta definición, podemos redefinir la optimalidad de Pareto como aquella solución que no puede ser Pareto-dominada por ninguna otra solución.

Cuando se tienen preferencias heterogéneas entre los agentes y Δ es un conjunto continuo, es muy común que las dos definiciones anteriores sean equivalentes, es decir, es eficiente si y sólo si es óptima de Pareto. Intuitivamente esto se da porque si tenemos una solución F que Pareto-domina a una solución E, quiere decir que existe un agente i tal que $F_i \succ_i E_i$; así, podemos dividir ese excedente obtenido por F_i entre todos los agentes, para lograr que todos mejoren.

Definición 11 *Dado* $\{m_i : i \in N\}$ *el conjunto de medidas de los agentes, diremos que una solución* F *es de* mínima justicia *si y sólo si* $m_i(F_i) \geq 1/n$*, para cada* $i \in N$*.*

Esta definición ha sido ampliamente usada en la literatura de división justa con diversos nombres, como *proporcional* para Steven Brams, o *justa* para Hervè Moulin, en esta tesis decidimos emplear el término de *mínima justicia* por dos razones, para enfatizar el hecho de que es la mínima propiedad que requerimos para poder hablar de una división justa, y porque las nociones de proporcionalidad y justicia indican otras características que no serán planteadas en este trabajo.

Definición 12 *Dado* $\{m_i : i \in N\}$ *el conjunto de medidas de los agentes, diremos que una solución* F *es* equitativa *si y sólo si* $m_i(F_i) = m_j(F_j)$*, para cada* $i,j \in N$*.*

Observemos que equitativa no implica ni siquiera mínima justicia, sin embargo, si tenemos una solución equitativa y óptima de Pareto, entonces también es de mínima justicia.

Definición 13 *Dado* $\{m_i : i \in N\}$ *el conjunto de medidas de los agentes, diremos que una solución* F *es* uniforme *si y sólo si* $m_i(F_j) = 1/n$*, para cada* $i,j \in N$*.*

Esta propiedad es, quizá, la más justa de todas las propiedades que una solución puede tener dado que es libre de envidias y equitativa; sin embargo, en general, puede no ser eficiente, y por esta razón es improbable que los agentes deseen esta asignación ya que todos mejorarían con una asignación eficiente.

Definición 14 *Dado* $\{m_i : i \in N\}$ *el conjunto de medidas de los agentes, diremos que una solución* F *es* super-libre de envidias *si y sólo si* $m_i(F_i) \geq 1/n$ *y* $m_i(F_j) < 1/n$*, para cada* $j \neq i \in N$*.*

Esta definición es debida a Julius Barbanel. En ella restringe la condición de libertad de envidias hasta un punto semejante al de la propiedad de uniformidad. De nuevo, esta propiedad no es compatible, en general, con la optimalidad de Pareto.

2.2 Paradigmas de División Justa

Una de las primeras observaciones referentes a las propiedades de una solución para ser considerada justa se basa en intentar obtener una solución que sea libre de envidias y óptima de Pareto. Desafortunadamente, la optimalidad de Pareto y libertad de envidias no pueden ser conjugadas en general, es decir, en caso de existir una solución óptima de Pareto, ésta puede no ser libre de envidias y viceversa.

Para cuando se tienen sólo dos agentes, claramente optimalidad de Pareto y libre de envidias son siempre compatibles, sin embargo esto deja de ser cierto para el caso de tres agentes. Esto es fácilmente observable del siguiente ejemplo. Tomamos $N = \{A, B, C\}$, y $\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ejemplo 15

$A : 1 \succeq_A 2 \succeq_A 3 \succeq_A 4 \succeq_A 5 \succeq_A 6$

$B : 4 \succeq_B 3 \succeq_B 2 \succeq_B 1 \succeq_B 5 \succeq_B 6$

$C : 5 \succeq_C 1 \succeq_C 2 \succeq_C 6 \succeq_C 3 \succeq_C 4$

Si resulta que los agentes tienen las anteriores preferencias, se puede observar que la única asignación libre de envidias es $(\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\})$ pues tanto A como B obtienen su primera y tercera opción, mientras que C obtiene su primera y cuarta. Sin embargo, se le deja al lector verificar que la solución $(\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\})$ es óptima de Pareto, más puede no ser libre de envidias.

Es por esta incompatibilidad que dos vertientes han aparecido en el área de división justa, una que trata de encontrar asignaciones libres de envidia y la otra que trata de hacer lo propio con óptimas de Pareto.

2.3 Teoremas de existencia

En esta sección se analizarán varios de los teoremas clásicos de existencia de soluciones con ciertas propiedades. Durante toda la sección, consideraremos a Δ como un conjunto compacto de $\mathbb{R}^m$, $N = \{0, 1, \ldots, n\}$, además, tendremos un conjunto de medidas de probabilidad definidas sobre una $\sigma-$álgebra común, contablemente aditivas y no atómicas $\{m_i : i \in N\}$, de los agentes.

2.3.1 Teorema de Neyman

En el año de 1946, Neyman demostró un teorema de existencia muy conocido y analizado en el área de divisiones justas. Este teorema establece la existencia de una solución uniforme con ciertas restricciones sobre el problema.

Sin embargo, la demostración del teorema no indica explícitamente como construir dicha solución, y a la fecha no se conoce procedimiento alguno para encontrar dicha partición en general.

Teorema 16 *Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$, y sean n medidas de probabilidad m_i no atómicas y contablemente aditivas definidas sobre un conjunto $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, entonces existe una solución uniforme.*

Observamos que las condiciones para la existencia de esta solución son las que hemos estado empleando a lo largo de esta tesis.

Antes de comenzar con la demostración del teorema, analicemos un objeto matemático interesante. Por simplicidad, usaremos la siguiente notación.

Notación 17 *Para todo $B \subseteq \Delta$, sea $m(B) = (m_1(B), m_2(B), \ldots, m_n(B))$.*

Notación 18 *Para cada $k-$partición $P = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$, sea la matriz de $n \times k$, $m_{n\times k}(P) = (m_i(P_j))_{i\in N, 1\leq j\leq k}$.*

La demostración del Teorema de Neyman se deduce a partir del siguiente resultado de teoría de la medida.

Teorema 19 (Teorema de Lyapounov) *Denotemos por D al conjunto $\{m(B) : B \subseteq \Delta\}$, entonces, D es un subconjunto cerrado, acotado y convexo de $\mathbb{R}^n$.*

La demostración de este teorema es técnica y no tiene relevancia explícita con lo tratado en esta tesis, por lo que se omite la demostración.

Demostración del Teorema de Neyman. Primeramente observemos que $m(\emptyset) = (0, 0, \ldots, 0)$, y que $m(\Delta) = (1, 1, \ldots, 1)$. Ahora, por el teorema de Lyapounov, el segmento que une al punto $(0, 0, \ldots, 0)$ con $(1, 1, \ldots, 1)$ está completamente contenido en D, es decir, para todo número real $0 \leq s \leq 1$ se tiene que $(s, s, \ldots, s) \in D$. De aquí que existe un subconjunto $B_1 \subseteq \Delta$ tal que $m_1(B_1) = m_2(B_1) = \ldots = m_n(B_1) = 1/n$. Ahora podemos restringir el problema al conjunto $\Delta_2 = \Delta \diagdown B$ con las medidas $\frac{n-1}{n} m_i$, para $i \in N$. De nuevo, por el teorema de Lyapounov, existe un subconjunto $B_2 \subseteq \Delta_2$ tal que $m_1(B_2) = m_2(B_2) = \ldots = m_n(B_2) = \frac{1}{n-1}$, y así sucesivamente. Al finalizar, tendremos una partición uniforme $B = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$. ■

Existe otra demostración mucho más directa usando una generalización del teorema de Lyapounov, conocida como el teorema de Dvoretsky, Wald y Wolfovitz, que a continuación enunciamos.

Teorema 20 (Teorema de Dvoretsky, Wald y Wolfovitz) *Dada $k \in \mathbb{N}$, denotemos por E al conjunto $\{m_{n\times k}(P) : P$ es una $k-$partición de $\Delta\}$, entonces, E es un conjunto cerrado, acotado y convexo del espacio de matrices de $n \times k$.*

Al igual que con el teorema de Lyapounov, la demostración se omite de esta tesis.

Demostración del Teorema de Neyman. (Segunda Versión) Basta con tomar $k = n$. Observemos que si tomamos la partición $P_i = (\emptyset, \ldots, \emptyset, \Delta, \emptyset, \ldots, \emptyset)$ con Δ en la posición $i-$ésima, entonces $m(P_i)$ es la matriz cuya columna $i-$ésima contiene únicamente 1's. Por el teorema de Dvoretsky, Wald y Wolfovitz, toda combinación lineal de estas matrices está también en E, por lo tanto, en particular está la combinación lineal $\frac{m(P_1)}{n} + \frac{m(P_2)}{n} + \ldots + \frac{m(P_n)}{n}$, que es igual a la matriz de $n \times n$ con todas las entradas iguales a $1/n$. ■

2.3.2 Teorema de Barbanel

En el año 2001, Julius Barbanel demostró un teorema de existencia que resulta interesante mencionar aquí por su parecido con el teorema de Neyman.

En este teorema se demuestra la existencia de una solución super-libre de envidias, y resulta interesante observar que las restricciones son prácticamente las mismas que para la existencia de la solución uniforme de Neyman.

Teorema 21 *Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$, y sean n medidas de probabilidad m_i no atómicas y contablemente aditivas definidas sobre un conjunto $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, lo siguiente es equivalente.*

I. *Las medidas m_i son linealmente independientes (i.e. no existen reales $a_1, a_2, ..., a_n$ tales que $a_1 m_1 + a_2 m_2 + ... + a_n m_n \equiv 0$).*

II. *Existe una solución super-libre de envidias.*

III. *Para cada s tal que $0 < s < 1$, $(s, s, \ldots, s)$ es un punto interior de D.*

Sin embargo, de la misma manera que con el teorema de Neyman, la demostración no indica de manera explícita la forma de encontrar dicha partición.

Antes de comenzar la demostración, observemos un corolario del teorema de Lyapounov.

Corolario 22 *Para toda $B \subseteq \Delta$, y para toda $k \in \mathbb{N}$, existe una $k-$partición $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_k)$ de B, tal que para cada $i \leq n$ y $j \leq k$, $m_i(Q_j) = \frac{m_i(B)}{n}$.*

Demostración del Teorema de Barbanel. Afirmamos que I implica III, III implica II, y, finalmente, II implica I.

I implica III. Observemos, primero, que D es simétrico con simetría central en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$.

Dado $B \subseteq \Delta$, se tiene que $m(B) \in D$, sin embargo, también se tiene que

$m(\Delta \setminus B) \in D$. Ahora,

$$m(\Delta \setminus B) = (m_1(\Delta \setminus B), m_2(\Delta \setminus B), \dots, m_n(\Delta \setminus B))$$

pero como m_i es medida de probabilidad,

$$m(\Delta \setminus B) = (1 - m_1(B), 1 - m_2(B), \dots, 1 - m_n(B))$$

que es el simétrico de $m(B)$ en el hipercubo unitario de dimensión n con respecto al centro del hipercubo.

Por otro lado, supongamos que, dado $0 < s < 1$, el punto $(s, s, \dots, s)$ es un punto frontera de D. Entonces, existe un hiperplano H, tal que H pasa por $(s, s, \dots, s)$ y que D está completamente contenido en uno de los dos subespacios cerrados. Sin embargo, por la simetría central, D tiene que estar completamente contenido en H. Ahora supongamos que H está dado por la ecuación $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = w$, como $(0, 0, \dots, 0) \in H$, entonces $w = 0$, por lo tanto, H está dado por la ecuación $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. Por otro lado, como $(1, 1, \dots, 1) \in H$, se tiene que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$.

Ahora, como $D \subseteq H$, sabemos que para toda $B \subseteq \Delta$,

$$\alpha_1 m_1(B) + \alpha_2 m_2(B) + \ldots + \alpha_n m_n(B) = 0$$

lo cuál nos dice que las medidas son linealmente dependientes.

III implica II. Asumimos que para toda $0 < s < 1$, $(s, s, \dots, s)$ es un punto interior de D. Construiremos una partición super-libre de envidias.
Para cada $k \in N$, definiremos una $n-$partición Q^k de Δ. Dada una k fija, y dado que $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ es un punto interior de D, podemos encontrar una $\varepsilon > 0$ de tal forma que existe una bola centrada en $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ de radio ε que está completamente contenida en D. De esta forma, para cada $k \in N$, $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \varepsilon, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in D$, donde el término $\frac{1}{n} + \varepsilon$ está en la $k-$ésima posición. Por lo tanto, existe $R_k \subseteq \Delta$ de tal forma que $m_k(R_k) = \frac{1}{n} + \varepsilon$, y $m_i(R_k) = \frac{1}{n}$ para toda $i \neq k$.
Por el corolario del teorema de Lyapounov, sabemos que existe una partición $(R_1, R_2, \dots, R_{k-1}, R_{k+1}, \dots, R_n)$ de $\Delta \setminus R_k$, tal que estos conjuntos tienen exactamente la misma medida respecto a cada m_i.
Así, para cada $j \neq k$:

$$m_k(R_j) = \left(\frac{1}{n-1}\right) m_k(\Delta \setminus R_k) = \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n-1}$$

y, además,

$$m_i(R_j) = \left(\frac{1}{n-1}\right) m_i(\Delta \diagdown R_k) = \frac{1}{n} \text{ para cada } i \neq k$$

De esta forma, definamos $Q^k = (R_1, R_2, , R_n)$y consideremos la matriz $m_{n\times n}(Q^k)$. Además, por construcción, la entrada i, j de la matriz será:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{n} & \text{si } i \neq k \\ \frac{1}{n} + \varepsilon & \text{si } i = j = k \\ \frac{1}{n} - \frac{\varepsilon}{n-1} & \text{si } i = k \text{ y } i \neq j \end{array}$$

Claramente, para cada $k \in \mathbb{N}$, $m_{n\times n}(Q^k) \in E$. Ahora, por el teorema de Dvoretsky, Wald y Wolfovitz, cualquier combinación lineal de las $m_{n\times n}(Q^k)$'s está también en E. Definamos

$$M = \frac{1}{n}(m(Q^1) + m(Q^2) + \ldots + m(Q^n))$$

claramente $M \in E$, y por lo tanto, existe una partición $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ de Δ, tal que $m_{n\times n}(P) = M$. Se le deja al lector verificar que P es en realidad una partición super-libre de envidias.

II implica I. Asumiremos que existe una partición $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ super-libre de envidias. Supongamos que las medidas son linealmente dependientes, es decir, que existen constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no todas cero, tales que $a_1 m_1(P_1) + \ldots + a_n m_n(P_n) = 0$. Podemos definir constantes positivas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ y subconjuntos disjuntos $\{s_1, s_2, \ldots, s_q\}$ y $\{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$ de N tales que

$$\alpha_1 m_{s_1} + \alpha_2 m_{s_2} + \ldots + \alpha_q m_{s_q} \equiv \beta_1 m_{t_1} + \beta_2 m_{t_2} + \ldots + \beta_r m_{t_r} \tag{2.1}$$

. Sabemos que si evaluamos en Δ, tendremos que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q \equiv \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r$. Definamos como γ a ese valor común $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q)$. Observemos que, para toda $j \in N$, tenemos que

$$\alpha_1 m_{s_1}(P_j) + \alpha_2 m_{s_2}(P_j) + \ldots + \alpha_q m_{s_q}(P_j) < \frac{\gamma}{n}$$

pues si $j \notin \{s_1, s_2, \ldots, s_q\}$, entonces $m_{s_i}(P_j) < \frac{1}{n}$ para toda $1 \leq i \leq q$, de donde

$$\begin{aligned} &\alpha_1 m_{s_1}(P_j) + \alpha_2 m_{s_2}(P_j) + \ldots + \alpha_q m_{s_q}(P_j) \\ &< \frac{1}{n}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q) = \frac{\gamma}{n}; \end{aligned}$$

y si $j \in \{s_1, s_2, \ldots, s_q\}$, entonces $j \notin \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$, y por el argumento anterior,

$$\beta_1 m_{t_1}(P_j) + \beta_2 m_{t_2}(P_j) + \ldots + \beta_r m_{t_r}(P_j) < \frac{\gamma}{n}$$

y por (2.1),

$$\begin{aligned}
&\beta_1 m_{t_1}(P_j) + \beta_2 m_{t_2}(P_j) + \ldots + \beta_r m_{t_r}(P_j) \\
&= \alpha_1 m_{s_1}(P_j) + \alpha_2 m_{s_2}(P_j) + \ldots + \alpha_q m_{s_q}(P_j) \\
&< \frac{\gamma}{n}
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\gamma &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q \\
&= \alpha_1 m_{s_1}(\Delta) + \alpha_2 m_{s_2}(\Delta) + \ldots + \alpha_q m_{s_q}(\Delta) \\
&= \sum_{j \in N} [\alpha_1 m_{s_1}(P_j) + \alpha_2 m_{s_2}(P_j) + \ldots + \alpha_q m_{s_q}(P_j)] \\
&< \sum_{j \in N} \frac{\gamma}{n} = \gamma
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Esto completa la demostración. ■

2.3.3 Otros Teoremas de División Justa

Hasta ahora tenemos las existencia de soluciones libres de envidias, de mínima justicia, uniformes y hasta super-libres de envidia. Además es sabido que siempre existe al menos una solución que sea óptima de Pareto bajo, incluso, menos restricciones que las de los teoremas anteriores.

De hecho, en esta sección, los teoremas de existencia se basan principalmente en un objeto matemático llamado $FIPS$ por sus siglas en inglés Full Individual Pieces Set (conjunto completo de trozos individuales). Este objeto está basado fuertemente en el Teorema de Dvoretsky, Wald y Wolfovitz.

Notación 23 *Para abreviar, dada una solución $A = (A_1, A_2, ..., A_n)$ usaremos $m(A) = (m_1(A_1), m_2(A_2), ..., m_n(A_n))$.*

Definición 24 *Dadas n medidas de probabilidad m_i no atómicas y contablemente aditivas definidas sobre un conjunto $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, definimos*

$$FIPS(m_1, m_2, ..., m_n; \Delta) = \{(m_i(A_j))_{i,j \in N} : A \in S\} \tag{2.2}$$

cuando las medidas y Δ sean claras por contexto, simplemente usaremos $FIPS$.

Observemos que el $FIPS$ es un conjunto de matrices; además, el renglón i de cada una de ellas es $(m_1(A_i), m_2(A_i), ..., m_n(A_i))$. En muchos casos no requerimos considerar a todo el $FIPS$ sino que basta con considerar la diagonal de cada matriz en el $FIPS$.

Definición 25 *Dadas n medidas de probabilidad m_i no atómicas y contablemente aditivas definidas sobre un conjunto $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, definimos*

$$IPS(m_1, m_2, ..., m_n; \Delta) = \{m(A) : A \in S\} \tag{2.3}$$

cuando las medidas y Δ sean claras por contexto, simplemente usaremos IPS.

Algunos autores han estudiado a estos conjuntos, y existen algunos teoremas interesantes que enunciaremos a continuación.

Teorema 26 *El $FIPS(m_1, m_2, ..., m_n; \Delta)$ es cerrado, convexo y acotado.*

La demostración de este teorema se sigue del teorema de Dvoretsky, Wald y Wolfovitz.

Corolario 27 *El $IPS(m_1, m_2, ..., m_n; \Delta)$ es cerrado, convexo y acotado. Además contiene a los puntos $(1, 0, 0, ..., 0)$, $(0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $(0, 0, ..., 0, 1)$, (i.e. contiene al $n - 1-$simplejo).*

Se le deja al lector la demostración de este corolario.

Como el IPS es cerrado, convexo y contiene al $n-1-$simplejo, podemos definir su frontera de una forma interesante.

Definición 28 *Definimos*

$$IPS^{out} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) = x \in \partial IPS : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 1\} \tag{2.4}$$

Análogamente, definimos

$$IPS^{in} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) = x \in \partial IPS : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1\} \tag{2.5}$$

Se le deja al lector verificar que, cuando las preferencias están dadas por las medidas, de forma que $A \succeq_i B$ si y sólo si $m_i(A) \geq m_i(B)$, entonces todas las soluciones óptimas de Pareto pertenecen al IPS^{out}. En el caso contrario, si las preferencias están dadas por $A \succeq_i B$ si y sólo si $m_i(A) \leq m_i(B)$, entonces, todas las soluciones óptimas de Pareto pertenecen al IPS^{in}.

Para el caso de $n = 2$, se tiene una propiedad de simetría para el IPS.

Lema 29 *El* $IPS(m_1, m_2, ..., m_n; \Delta)$ *es simétrico con simetría central en el punto* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Demostración. Sea $A = (A_1, A_2)$ una solución, tomamos el punto del IPS correspondiente a la solución A, es decir, $m(A) = (m_1(A_1), m_2(A_2))$. Ahora, construimos la nueva solución $A' = (A_2, A_1)$.

Observemos que $m(A') = (m_1(A_2), m_2(A_1)) = (m_1(\Delta \setminus A_1), m_2(\Delta \setminus A_2))$, y como m_i es medida de probabilidad, se tiene que $m(A') = (1 - m_1(A_1), 1 - m_2(A_2))$, que es justo la reflexión de $m(A)$ con respecto al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. ■

Un resultado, debido a Barbanel, declara que las condiciones de cerradura, convexidad, acotado y simetría son necesarias y suficientes para definir la forma del IPS.

Teorema 30 *Sea* A *un subconjunto de* $\mathbb{R}^2$. *Existe* Δ *y medidas* m_1 *y* m_2 *en* Δ *de tal forma que* $A = IPS(m_1, m_2; \Delta)$ *si y sólo si* A *satisface las siguientes cinco condiciones:*

a) $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$;

b) $(1, 0)$ *y* $(0, 1) \in A$;

c) A *es cerrado;*

d) A *es convexo;*

e) A *tiene simetría central en* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Antes de demostrar este teorema, enunciaremos dos lemas que serán útiles en la prueba. Supongamos que tenemos un conjunto U que satisface las cinco condiciones del teorema. Las condiciones a) y d) nos dicen que U^{out} es una curva conexa y cerrada. Las condiciones a) y b) implican que esta curva contiene a los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. De esta forma, U^{out} consiste de todos los puntos (x_1, x_2) en la frontera de U para los cuales $x_1 + x_2 \geq 1$. O, de forma equivalente, U^{out} es el subconjunto de la frontera de U que incluye los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y el resto de los puntos de la frontera que no están del mismo lado del $1-$simplejo del que está el origen.

Lema 31 *Supongamos que* U *y* V *son tales que ambos satisfacen las cinco condiciones del teorema. Si* $U^{out} \subseteq V^{out}$, *entonces* $U^{out} = V^{out}$.

Demostración. Como vimos antes, tanto U^{out} como V^{out} son curvas conexas y cerradas que tienen como puntos frontera a los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Ahora, sin perder generalidad, supongamos que $U^{out} \subset V^{out}$, observemos que, tanto U^{out} como V^{out}, pueden ser parametrizadas por $\alpha : [0, \pi/2] \longrightarrow U^{out}$ y $\beta : [0, \pi/2] \longrightarrow V^{out}$, tomando $\alpha(m)$ y $\beta(m)$ como el punto de intersección de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente m con U^{out} y V^{out} respectivamente. De esta forma, $U^{out} \subset V^{out}$ implica que $U^{out} = V^{out}$ de manera directa, pues ambas curvas tienen el mismo dominio y una está contenida dentro de la otra. ■

Lema 32 *Cualquier conjunto que satisfaga las cinco condiciones del teorema está únicamente determinado por su frontera exterior. En otras palabras, si* U *y* V *son tales que satisfacen las cinco condiciones del teorema y* $U^{out} = V^{out}$*, entonces* $U = V$*.*

Demostración. Sea U cualquier conjunto que satisfaga las cinco condiciones del teorema. Se define U^{out} de la forma usual. Por la condición e), esto define de manera única a U^{in}. Por las condiciones a) y b), tanto U^{out} como U^{in} tienen como puntos frontera a $(0,1)$ y $(1,0)$. De aquí se sigue que $U^{out} \cup U^{in}$ es una curva cerrada simple, y, por las condiciones c) y d), U consiste exactamente de esta curva y la región encerrada por ella. Esta determinación de U a partir de U^{out} es claramente única. ■

Ahora procederemos a la demostración del teorema. Observemos que el resultado es cierto de forma directa en una dirección, por lo que en la demostración nos enfocaremos a demostrar el sólo si.

Demostración del Teorema. Supongamos que A es un conjunto que satisface las cinco condiciones dadas. Debemos encontrar Δ, m_1 y m_2 en Δ de tal forma que $A = IPS(m_1, m_2;\Delta)$.

Definimos nuestro conjunto Δ que sea A^{out}. Para cada $B \subseteq \Delta$, sea B_1 la proyección de B en el eje x_1, y B_2 la proyección en el eje x_2. Sea λ la medida de Lebesgue en la recta real. Finalmente, definimos m_1 y m_2 en Δ como sigue: para cada $B \subseteq \Delta$, $m_1(B) = \lambda(B_1)$ y $m_2(B) = \lambda(B_2)$. Es fácil ver que tanto m_1 como m_2 son medidas de probabilidad contablemente aditivas y no atómicas en Δ, pues provienen de la composición de una proyección y la medida de Lebesgue. Ahora bien, como el teorema es cierto en la otra dirección, $IPS(m_1, m_2, \Delta)$, que por simplicidad denotaremos simplemente como IPS por el resto de la demostración, satisface las cinco condiciones del teorema. Por lo tanto, por los lemas anteriores, sólo resta demostrar que $A^{out} = IPS^{out}$.

Supóngase que $(p,q) \in A^{out}$ y por ello $(p,q) \in \Delta$. Lo que deseamos demostrar es que $(p,q) \in IPS^{out}$. Antes de demostrarlo requerimos de la siguiente notación: sea $UL(p,q) = \{(x_1,x_2) \in \Delta : 0 \leq x_1 \leq p\}$ y $UL(p,q) = \{(x_1,x_2) \in \Delta : p < x_1 \leq 1\}$. Observemos que de esta forma, $\{UL(p,q), LR(p,q)\}$ es una $2-$partición de Δ, y que el decidir que $(p,q) \in UL(p,q)$ y $(p,q) \notin LR(p,q)$ es arbitraria, dado que las medidas de estos dos conjuntos no cambian con esta decisión pues las medidas m_1 y m_2 son no atómicas. Como antes, denotaremos por $UL_1(p,q)$ a la proyección de $UL(p,q)$ sobre el eje x_1 y de forma análoga con $UL_2(p,q)$, $LR_1(p,q)$, y $LR_2(p,q)$.

Dado un punto $(p,q) \in \Delta$, considérese la partición de Δ dada por $\{UL(p,q), LR(p,q)\}$. Tenemos que

$$m_1(UL(p,q)) = \lambda(UL_1(p,q)) = \lambda([0,p]) = p$$

y

$$m_2(LR(p,q)) = \lambda(LR_2(p,q)) = \lambda([0,q)) = q.$$

Esto nos dice que $(p,q) \in IPS$. Lo que necesitamos demostrar es que, además, $(p,q) \in IPS^{out}$. Consideremos tres casos:

Caso 33 *$p = 1$. Dado que sabemos que $IPS \subseteq [0,1] \times [0,1]$, se sigue que $(p,q) \in IPS^{out}$.*

Caso 34 *$q = 1$. Como en el caso anterior, se sigue que $(p,q) \in IPS^{out}$.*

Caso 35 *$p \neq 1$ y $q \neq 1$. Entonces, basta con demostrar que la partición $\{UL(p,q), LR(p,q)\}$ de Δ es óptima de Pareto. Supongamos que existiera otra partición $\{X_1, X_2\}$ de Δ de tal forma que $m_1(X_1) \geq m_1(UL(p,q)) = p$ y $m_2(X_2) \geq m_2(LR(p,q)) = q$, con alguna de las desigualdades siendo estrictas. Sean $S \subseteq UL(p,q)$ y $T \subseteq LR(p,q)$ conexos de tal forma que $X_1 = UL(p,q) \cup T \diagdown S$ y $X_2 = LR(p,q) \cup S \diagdown T$. Observemos que*

$$m_1(X_1) = m_1(UL(p,q)) + m_1(T) - m_1(S)$$

y

$$m_2(X_1) = m_2(LR(p,q)) + m_2(S) - m_2(T)$$

de donde se sigue que $m_1(T) \geq m_1(S)$ y $m_2(S) \geq m_2(T)$, con alguna de esas desigualdades siendo estrictas. Ahora, definamos $S_{1,\inf} = \inf\{p : (p,q) \in S\}$ y $S_{2,\inf} = \inf\{q : (p,q) \in S\}$. De manera análoga definamos $S_{1,\sup}$ y $S_{2,\sup}$, y igualmente para T.

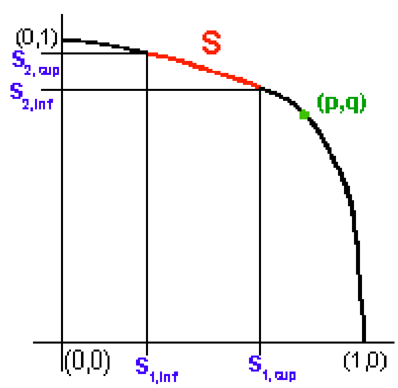


FIGURA 2.1.

Definamos, también, $M_S = \frac{S_{2,\sup} - S_{2,\inf}}{S_{1,\sup} - S_{1,\inf}}$*, y de manera análoga* M_T*. Observemos que como* Δ *proviene de la frontera exterior de un conjunto convexo, se tiene que* $0 > M_S > M_T$*, y por lo tanto, si* $m_1(T) \geq m_1(S)$*, entonces* $m_2(T) \geq m_2(S)$ *que es una contradicción, y por lo tanto no pueden existir* S *y* T *conexos. Ahora bien, como* m_1 *y* m_2 *son contablemente aditivas, tampoco pueden existir* S *y* T *en general, por lo tanto,* $\{UL(p, q), LR(p, q)\}$ *es óptima de Pareto.*

■

Este teorema no tiene análogo conocido para dimensión mayor a 2. Sin embargo, en una sección posterior se establecerá una relación entre el resultado principal de esta tesis y el IPS, y se analizará más a fondo su estructura y utilidad.

2.4 Reparticiones de Objetos Discretos

Además de encontrar teoremas de existencia, algunos autores se han dedicado a tratar de encontrar procedimientos para la construcción de soluciones con diversas propiedades. En esta sección analizaremos los casos en que tanto N como Δ son finitas, y daremos algunos de los procedimientos clásicos para encontrar soluciones.

2.4.1 Métodos de Alternancia

En estos métodos se busca encontrar una partición ordenada de Δ obtenida a partir de objetos (i.e. elementos de Δ) escogidos secuencialmente por cada agente. El orden en el que los agentes escogen sus objetos es relevante.

Alternancia estricta

Para este método, podemos tener $n!$ ordenes distintos, donde n es la cardinalidad de N. Denotaremos a cada orden como la $n-$ada $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, donde $j_i \neq j_k$ para toda $i \neq k$, y $j_i \in N$.

Ejemplo 36 *Digamos que* $N = \{A, B\}$*, y que* $\Delta = \{1, 2, 3, 4\}$*. Si tenemos las preferencias*
$A : 1 \succeq_A 2 \succeq_A 3 \succeq_A 4$
$B : 4 \succeq_B 1 \succeq_B 2 \succeq_B 3$
El método de alternancia estricta con el orden (A, B) *daría como resultado la solución* $(\{1, 2\}, \{4, 3\})$*, pero con el orden* (B, A) *daría como resultado* $(\{4, 2\}, \{1, 3\})$*.*

Observamos en este ejemplo que el agente A prefiere el orden (A, B) y el agente B prefiere al orden (B, A).

Sin embargo, si alguno de los agentes intenta aprovecharse del conocimiento que tiene acerca de las preferencias de otro, podría ser que mejorara su situación. Por el momento, asumiremos que ambos agentes conocen las preferencias del otro, que en general no es el caso. Asumiremos también que ambos saben que el otro actuará de manera *racional*, sin engañar, en términos de sus propios intereses.

El problema radica en lo que es considerado como *racional*. Es natural suponer que los agentes racionales nunca

1. escogerán su último objeto preferido;
2. desperdiciarán elecciones en un objeto deseado que saben que permanecerá disponible, y por ende, puede ser escogido luego.

Para ilustrar el efecto de estas suposiciones, volvamos al ejemplo anterior. Si con el orden (A, B), B escogiera como su primera opción a 2, entonces la solución que se obtendría suponiendo que A efectúa sus elecciones de forma sincera, sería $(\{2, 4\}, \{1, 3\})$, que resulta ser mejor para B y peor para A.

Pero si ambos jugadores tratan de aprovecharse del conocimiento de las preferencias del otro, puede ser que ambos empeoren, por ejemplo si A decide tomar el 2 como su primera opción sabiendo que para B no es tan preciado el 1, y si B utiliza el mismo razonamiento tomará el 1 dado que A no lo aprecia tanto, entonces la solución resultante con el orden (A, B) es $(\{2, 3\}, \{1, 4\})$. Pero si todavía más, A al saber que B tomó el 1 sólo para no permitir que A se lo llevara, puede decidir *castigar* a B y tomar 4 en su segunda ronda, de donde se obtendría la solución $(\{2, 4\}, \{1, 3\})$ en la que ambos empeoran.

Es, de hecho, un teorema que lo mejor es hacer elecciones sinceras, cuando sólo se pueden comparar conjuntos objeto a objeto.

Teorema 37 *Dado el problema de división justa* $(N = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}, \Delta)$*, si una solución* $F \in S$ *proviene de elecciones sinceras en algún orden de los agentes, entonces es eficiente (y óptima de Pareto).*

Demostración. Supongamos que $F \in S$ proviene de elecciones sinceras en algún orden. Sea $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ donde F_i es el conjunto de objetos que obtiene i. Supongamos que F no es eficiente, es decir, existe una solución $E \in S$ tal que para toda $i \in N$, i prefiere E_i a F_i ($E_i \succeq_i F_i$). Observemos que si existe $j \in N$ tal que $\#E_j > \#F_j$ entonces existe k tal que $\#E_k < \#F_k$, (donde $\#C$ denota la cardinalidad de C), entonces no podemos saber si $E_j \succeq_j F_j$. Por lo tanto, $\#E_i = \#F_i$ para todo i.

Ahora, hay un agente que escoge primero, digamos k, entonces, existe un elemento $i \in E_k$ de tal forma que $i \succeq_k j$, para todo $j \in F_k$. Sin embargo, esto es una contradicción, pues si k eligió sinceramente, claramente debió escoger i como su primera opción.
■

El converso no es cierto en general, para observar esto, tomemos el problema de división justa $(\{A, B\}, \Delta)$, y la solución $F = \{\emptyset, \Delta\}$, esta solución es eficiente (y óptima de Pareto) pues si le quitamos cualquier objeto a B para mejorar a A, entonces B empeora, y claramente no podemos mejorar a B.

Si asumimos, además, que se pueden realizar comparaciones de cualquier colección de objetos, entonces la eficiencia puede fallar.

Ejemplo 38 *Considérese el problema de división justa* $(\{A, B\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$. *Si tenemos las medidas de preferencia de cada jugador*
$A : m(\{1\}) = m(\{2\}) = 0.45, m(\{3\}) = m(\{4\}) = m(\{5\}) = m(\{6\}) = 0.025$
$B : m(\{1\}) = 0.19, m(\{2\}) = 0.17, m(\{3\}) = m(\{4\}) = m(\{5\}) = m(\{6\}) = 0.16$

Entonces tanto A como B prefieren el resultado dado por la secuencia de elección (A, A, B, B, B, B) al resultado dado por la alternancia estricta en cualquier orden. El agente A obtiene $\{1, 2\}$ que representa el 90% del valor que considera tienen los 6 objetos, mientras que B obtiene $\{3, 4, 5, 6\}$ que representa el 64%, con este método, mientras que con alternancia estricta, en el orden (A, B), A obtendría $\{1, 3, 5\}$ que representa el 50% y B $\{2, 4, 6\}$ que representa el 49%, mientras que con el orden (B, A), B obtendría $\{1, 3, 5\}$ que representa el 51% y A $\{2, 4, 6\}$ que representa el 50%.

Como podemos observar, el hecho de que el resultado obtenido con alternancia estricta sea o no eficiente depende fuertemente de las suposiciones que hagamos acerca de la habilidad de los agentes para comparar colecciones.

Alternancia balanceada

Como hemos visto, en el método de alternancia estricta, el agente que tiene el primer turno para escoger objeto tiene una gran ventaja sobre los demás agentes. Esto se acentúa cuando el número de agentes es muy parecido al número de objetos a repartir, pues el último jugador en escoger tiene muy pocas opciones, y es posible que los objetos que más valora ya hayan sido escogidos.

Para disminuir esta ventaja, se utiliza el método de la alternancia balanceada, que permite a los agentes realizar sus turnos de tal forma que cada uno sea el primero es escoger en distintos puntos de la ronda de selección de objetos.

Antes de comenzar la explicación de la alternancia balanceada, simplificaremos el proceso de asignación de objetos. Para esto, se restringe este procedimiento sólo a los objetos que están en conflicto, dejando afuera aquellos objetos que no están en disputa. Es decir, si para dos agentes la primera opción de ambos es distinta, estos objetos se reparten al agente que los deseaba y se continúa el procedimiento como si el problema hubiera excluido desde el principio esos objetos.

Si un objeto en cierto turno está en disputa por ambos agentes, este se deposita en una *pila de conflicto*. El proceso de selección continúa con los objetos que no se han elegido aún y que no se encuentran en la pila de conflicto. A este proceso de repartir los objetos que no están en disputa y de depositar lo que sí lo están en la pila, se le denomina *query step*.

Ejemplo 39 *Supongamos que tenemos dos agentes* $\{A, B\}$*, que se desean repartir cuatro objetos,* $\{1, 2, 3, 4\}$*, con las siguientes preferencias*
$A : 1 \succeq_A 2 \succeq_A 3 \succeq_A 4$
$B : 2 \succeq_B 3 \succeq_B 4 \succeq_B 1$

Observemos que en este caso, la primera elección no tiene conflictos, por lo que el problema se reduce a $\{A, B\}$, $\{3, 4\}$, con las preferencias
$A : 3 \succeq_A 4$
$B : 3 \succeq_B 4$
Habiendo asignado el objeto 1 al agente A y el objeto 2 al agente B por no estar en disputa en el primer turno. A partir de aquí, los dos agentes tienen las mismas preferencias, por lo que los objetos 3 y 4 se depositan en la pila de conflicto.

Una consecuencia importante del uso del query step es que existe una concordancia total entre los dos agentes sobre los objetos que se encuentran en la pila de conflicto, es decir, que el primer objeto depositado en la pila es el objeto que los dos más desean, y el segundo es el siguiente y así sucesivamente.

De esta forma se ha reducido el problema de división justa al de asignar los objetos que se encuentran en la pila de conflicto en el que los dos agentes tienen el mismo objeto preferido, siguiente preferido, etc., y así hasta el menos preferido, en común. Suponiendo que los agentes no modifican sus preferencias como resultado de la asignación de objetos que no están en disputa, los agentes se disputarán todos y cada uno de los objetos en la pila de conflicto.

Una observación importante es que en este caso, los agentes no se benefician al realizar elecciones no sinceras, como podía ser el caso en algunos ejemplos anteriores. Esto se debe a que los agentes tienen las mismas preferencias sobre la pila.

Supongamos, ahora, que tenemos cuatro objetos en la pila de conflictos, y asumamos que el agente A tiene la opción (obtenida de forma aleatoria) de realizar su elección primero. Además del orden (A, B), existen otros dos ordenes de manera natural:

- A, B, B, A
- A, B, B, B

En ambos casos se tiene un procedimiento de alternancia que, de cierta forma, compensa la ventaja del agente A por ser el primero en escoger. El problema principal al que nos enfrentamos es que, dado que el procedimiento es asimétrico, alguno de los agentes puede adquirir un sentimiento de rencor o injusticia basado en su apreciación de que el procedimiento beneficia a su oponente.

Asimismo existen casos en los que el agente B no puede llegar a igualar la ventaja que obtiene el agente A ni siquiera con tres elecciones al hilo. Por ejemplo, si se reparte un auto deportivo del año, una silla normal, un reloj de pulso y una lámpara, y ambos agentes tienen las preferencias en el orden en el que se mencionaron los objetos, el orden A, B, B, B asigna el automóvil al agente A y los otros tres objetos a B, con lo que claramente no se consigue equitatividad.

Por otro lado, si la pila de conflicto contiene únicamente un objeto, el agente que tenga la suerte de escoger primero lo recibe, mientras que el otro es dejado con nada. Con dos objetos la situación no mejora sensiblemente, pues un agente obtiene el objeto preferido y el otro el menos preferido. Sin embargo, esta desventaja se reduce mientras más objetos se encuentren en la pila de conflicto.

Un primer acercamiento saca ventaja del hecho de que en el orden (A, B) el agente A se ve favorecido, mientras que en el orden (B, A) el agente B es el beneficiado. De esta forma se construye el orden de alternancia balanceada (A, B, B, A), que se repite mientras haya objetos a repartir. Este orden se dice *de dos turnos*, porque podemos pensar en el orden (A, B) como un turno y (B, A) como en un segundo turno. Algo que florece de manera natural es el generalizar esta idea a ordenes *de tres turnos*, *de cuatro turnos*, y más.

La motivación principal para extender el número de turnos en un orden de alternancia balanceada es el hecho de que, el orden de dos turnos (A, B, B, A) es más probable que beneficie a A que a B. Con esto no decimos que el orden siempre favorezca al agente A, sino que tiende a favorecerlo.

Ejemplo 40 *Supongamos que los agentes A y B se desean repartir los siguientes cuatro objetos, y que sólo están interesados en su valor monetario.*

- Un automóvil usado (\$30,000);
- Un piano (\$20,000);
- Una pintura (\$10,000); y
- Un sillón (\$5,000).

Observemos que la diferencia entre los valores de los dos primeros objetos (\$10,000) es mayor que la diferencia entre los dos últimos objetos (\$5,000). De esta forma, el agente A es favorecido por el orden de dos turnos (A, B, B, A). Así que, el beneficio que obtiene el agente A se irá incrementando si se tuvieran ocho objetos y se continuara con este orden.

El orden usual que se utiliza en la alternancia balanceada se construye de la siguiente forma. Se comienza con el orden (A, B) para uno o dos objetos, y a partir de aquí, se obtiene el siguiente orden reemplazando cada A por A, B y cada B por B, A. Así se obtiene el orden (A, B, B, A) para tres o cuatro objetos, y luego el orden (A, B, B, A, B, A, A, B) para cinco a ocho objetos y así sucesivamente.

Alternancia balanceada (tres o más agentes)

Para generalizar el orden usual en la alternancia balanceada, seguimos el siguiente procedimiento. Se comienza con el orden $(A_1, \ldots, A_n)$, para 1 a n objetos. Luego se añade el orden anterior a la inversa $(A_n, \ldots, A_1)$ y se obtiene $(A_1, \ldots, A_n, A_n, \ldots, A_1)$ para $n+1$ a $2n$ objetos. Luego se agrega el orden anterior intercambiando los lugares de A_i y A_{n-i}, para obtener $(A_1, \ldots, A_n, A_n, \ldots, A_1, A_n, \ldots, A_1, A_1, \ldots, A_n)$ para $2n+1$ a $4n$ objetos, y así sucesivamente. Observemos que si de estos ordenes se eliminan k agentes, el orden resultante es el orden usual de alternancia balanceada para $n - k$ agentes.

2.4.2 Mejor Postor y Compensación Monetaria

Existen dinámicas para resolver el problema de asignación de objetos discretos entre un número finito de agentes. La más usual, por su fácil forma de implementar, es la de la subasta, en la que cada objeto es obtenido por el mejor postor, pero más aún, una persona realiza sus ofertas sabiendo si su oferta está o no por arriba de las ofertas de las demás personas.

Existen, sin embargo, otros procedimientos que pueden garantizar optimalidad de Pareto por medio de un procedimiento axiomático.

En este caso, haremos uso de las diferencias en las valoraciones que los agentes tienen sobre el conjunto de objetos para elevar el porcentaje que puedan obtener por encima del correspondiente $1/n$.

El problema está caracterizado por la terna (N, Δ, A) donde $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es un conjunto finito de agentes, $\Delta = \{1, 2, \ldots, m\}$ es el conjunto finito de objetos a repartir, y $A = (a_{ij})_{i \in \Delta, j \in N}$ es una matriz de $m \times n$ donde el valor de a_{ij} representa el valor que el agente j le da al objeto i. Esta matriz, a diferencia de la subasta normal, es generada a petición de un juez que solicita a los agentes que valúen los objetos de forma secreta, y le entreguen sus valoraciones.

Dada una partición $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ de Δ, donde los M_j pueden ser vacíos, denotaremos por $u_j = \sum_{i \in M_j} a_{ij}$, el valor que el conjunto M_j tiene para el agente j. En el caso de que M_j sea vacío, definiremos $u_j = 0$. Tendremos también las compensaciones monetarias dadas por un vector de pago $x \in \mathbb{R}^n$ de tal forma que $\sum_{i \in N} x_i = 0$. Así, en el caso en que $x_j < 0$ significa que el agente j debe pagar y en el caso de que sea positiva, significa que recibe dinero.

Definición 41 *Entenderemos por una solución de* (N, Δ, A) *a una pareja* (u, x) *donde* u *es resultado de una asignación de objetos en* Δ *y* $x \in \mathbb{R}^n$ *es un vector de pago.*

Definición 42 *Diremos que* u proviene de los mejores postores *si existe una partición* $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ *de* Δ *de tal forma que si* $k \in M_j$*, entonces* $a_{kj} \geq a_{ki}$ *para toda* $i \in N$*.*

Veamos que para este problema en particular, la definición de optimalidad de Pareto se puede escribir en términos de la solución.

Definición 43 *Una solución* (u, x) *es óptima de Pareto si y sólo si no existe ninguna otra solución* $(\widetilde{u}, \widetilde{x})$ *tal que* $\widetilde{u} + \widetilde{x} \geq u + x$ *(es decir,* $\widetilde{u}_i + \widetilde{x}_i \geq u_i + x_i$ *para todo* $i \in N$*) con al menos una desigualdad siendo estricta.*

A partir de esta definición podemos enunciar un lema que será usado más adelante.

Lema 44 *Si en la solución* (u, x)*,* u *proviene de los mejores postores, entonces* (u, x) *es óptima de Pareto.*

Demostración. Sea (u, x) una solución que proviene de los mejores postores y supongamos que existe una solución $(\widetilde{u}, \widetilde{x})$ tal que $\widetilde{u} + \widetilde{x} \geq u + x$ con al menos una desigualdad siendo estricta. Entonces, sumando las n desigualdades tendremos que $\sum_{j \in N} \widetilde{u}_j > \sum_{j \in N} u_j$ puesto que $\sum_{j \in N} \widetilde{x}_j = 0$ y $\sum_{j \in N} x_j = 0$. Sin embargo, como u proviene de los mejores postores, se tiene que $\sum_{j \in N} \widetilde{u}_j \leq \sum_{j \in N} u_j$ lo que es una contradicción. ■

El converso se le deja al lector. Para observar que es cierto, basta con tomar algún objeto que esté asignado a un agente que no sea el mejor postor, por medio de una venta, el agente podría obtener más de lo asignado con la solución.

Para cada $P \subseteq \Delta$ denotaremos por A_p a la matriz A restringida a los renglones en P. Consideremos la familia de problemas $\{(N, P, A_p) : P \subseteq \Delta\}$ y la familia correspondiente de soluciones $\{(u(P), x(P)) : P \subseteq \Delta\}$. De esta forma, denotaremos por $\varphi(P) = u(P) + x(P)$ el valor total que reciben los agentes.

Para reflejar el hecho de que el valor de los objetos es asignado únicamente por los agentes, se decide que los cambios en el total de lo recibido por un agente cuando se omite un objeto, sea proporcional al valor que se le da.

Definición 45 *Diremos que la familia de soluciones* $\{\varphi(P) : P \subseteq \Delta\}$ está en proporción con A *si y sólo si*

$$(\varphi_i(P) - \varphi_i(P \diagdown \{k\}))a_{kj} = (\varphi_j(P) - \varphi_j(P \diagdown \{k\}))a_{ki} \tag{2.6}$$

para cada $i, j \in N$ *y* $k \in P$*.*

El resultado que queremos obtener es lograr una solución que provenga de los mejores postores y con el vector de compensación monetaria siga siendo en proporción con A. Para esto requerimos el siguiente lema.

Lema 46 *Sea $\{(u(P), x(P)) : P \subseteq \Delta\}$ una familia de soluciones para (N, Δ, A) en proporción con A y $m(P) = \sum_{j \in N} \varphi_j(P)$ entonces*

(a) $\varphi_i(P) = \varphi_i(P \setminus \{k\}) + [m(P) - m(P \setminus \{k\})]a_{ki} / \sum_{j \in N} a_{kj}$*, para cada* $P \subseteq \Delta$ *y* $k \in P$.

(b) $m(P) = \sum_{k \in P} m(\{k\})$.

(c) *Más aún, si la familia es óptima de Pareto, entonces* $m(\{k\}) = \max_{i \in N} a_{ki}$ *para cada* $k \in \Delta$.

Demostración.

(a) Consideremos la familia $\{(u(P), x(P)) : P \subseteq \Delta\}$ de soluciones para (N, Δ, A), un subconjunto arbitrario $P \subseteq \Delta$, y $k \in P$. Sumando las ecuaciones correspondientes en (2.6) sobre $j \in N$, obtenemos que

$$\begin{aligned}(\varphi_i(P) - \varphi_i(P \setminus \{k\})) \sum_{j \in N} a_{kj} &= \sum_{j \in N} (\varphi_j(P) - \varphi_j(P \setminus \{k\})) a_{ki} \\ &= [m(p) - m(P \setminus \{k\})] a_{ki}\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\varphi_i(P) = \varphi_i(P \setminus \{k\}) + [m(p) - m(P \setminus \{k\})] \frac{a_{ki}}{\sum_{j \in N} a_{kj}}. \tag{2.7}$$

(b) Si ahora sumamos (2.7) sobre $i \in N$, la prueba es directa por inducción sobre la cardinalidad de P usando el hecho de que $m(\emptyset) = 0$ y que $\varphi_i(\emptyset) = 0$ para toda $i \in N$.

(c) Por (b), tenemos que

$$m(\{k\}) = \sum_{i \in N} \varphi_i(P) = \sum_{i \in N} (u_i(P) + x_i(P)) = \sum_{i \in N} u_i(P) = a_{kj}.$$

Ahora, como $u(P)$ proviene de los mejores postores se tiene por el Lema 30 que $m(\{k\}) = a_{kj} = \max_{i \in N} a_{ki}$.

■

Ahora, consideramos la siguiente solución: Todos los objetos son asignados a su mejor postor, y tenemos la compensación monetaria calculada de la siguiente forma

$$x_i = \sum_{k \in \Delta} \left[c_k \frac{a_{ki}}{\sum_{j \in N} a_{kj}} \right] - u_i$$

donde $c_k = \max_{j \in N} a_{kj}$. En caso de empate en el mejor postor, se utiliza cualquier mecanismo para asignarlo a uno de ellos.

Ahora observemos el siguiente teorema.

Teorema 47 *La familia de soluciones* $\{(u(P), x(P)) : P \subseteq \Delta\}$ *para* (N, Δ, A) *está en proporción con* A *y cada* $(u(P), x(P))$*,* $P \subseteq \Delta$ *es óptima de Pareto si y sólo si para toda* $P \subseteq \Delta$*,* $u(P)$ *proviene de los mejores postores y*

$$x_i = \sum_{k \in \Delta} \left[c_k \frac{a_{ki}}{\sum_{j \in N} a_{kj}} \right] - u_i(P) \tag{2.8}$$

Demostración. Supongamos que una familia de soluciones $\{(u(P), x(P)) : P \subseteq \Delta\}$ para (N, Δ, A) está en proporción con A, y en la que cada $(u(P), x(P))$, $P \subseteq \Delta$ es óptima de Pareto. Observemos que como $c_k = \max_{j \in N} a_{kj}$ y si tomamos $P = \{k\}$, usando (2.7), entonces

$$\varphi_i(\{k\}) = m(\{k\}) \frac{a_{ki}}{\sum_{j \infty N} a_{kj}} = c_k \frac{a_{ki}}{\sum_{j \infty N} a_{kj}}. \tag{2.9}$$

Ahora, para una $P \subseteq \Delta$ arbitraria y para $i \in N$, por el Lema 32(b) y (c) se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_i(P) &= \varphi_i(P \diagdown \{k\}) + [m(P) - m(P \diagdown \{k\})] \frac{a_{ki}}{\sum_{j \in N} a_{kj}} \\ &= \varphi_i(P \diagdown \{k\}) + c_k \frac{a_{ki}}{\sum_{j \in N} a_{kj}} \end{aligned}$$

así que si repetimos el argumento anterior para los objetos en $P \diagdown \{k\}$, entonces obtenemos (2.8).

Consideremos ahora, la familia de soluciones $\{(u(P), x(P)) : P \subseteq \Delta\}$ para (N, Δ, A) donde $u(P)$ proviene de los mejores postores y $x(P)$ está dado por (2.8).

Notemos que

$$(\varphi_i(P) - \varphi_i(P \diagdown \{k\}))a_{kj} = c_k \frac{a_{ki} a_{kj}}{\sum_{j \in N} a_{kj}} = (\varphi_j(P) - \varphi_j(P \diagdown \{k\}))a_{ki}$$

por lo que la familia de soluciones $\{(u(P), x(P)) : P \subseteq \Delta\}$ para (N, Δ, A) está en proporción con A. Y por el Lema 30, cada $(u(P), x(P))$, $P \subseteq \Delta$ es óptima de Pareto, y esto termina la demostración. ■

Notemos que con la solución de este teorema, el agente i considera que obtiene $c_k a_{ki} / \sum_{j \in N} a_{kj}$ del objeto k, así que cada agente considera que obtiene el mismo porcentaje $c_k \sum_{j \in N} a_{kj}$ del valor a_{ki} que él cree que el objeto k tiene.

Ejemplo 48 *Supongamos que tenemos tres agentes, que heredan 2 objetos ($N = \{1, 2, 3\}$ y $\Delta = \{1, 2\}$) y que los agentes en N evalúan los objetos de acuerdo con la siguiente matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 50 \\ 75 & 180 & 200 \end{pmatrix}$$

Calculemos la solución que establece el teorema para este ejemplo. Ambos objetos son asignados al agente 3, pues él es el mejor postor para ambos objetos. De esta forma, el agente 3 recibe 250 en objetos y ningún pago de los otros agentes. De esta forma, tenemos que $u^T = (0, 0, 250)$ y la correspondiente compensación monetaria está dada por

$$x = \frac{50}{95} \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} + \frac{200}{455} \begin{pmatrix} 75 \\ 180 \\ 200 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46.12 \\ 89.64 \\ -135.76 \end{pmatrix}$$

El resultado obtenido se puede describir de esta manera: el agente 1 obtiene 46.12 cuando en realidad sólo esperaba una tercera parte de su oferta, es decir 33.33; el agente 2 obtiene 89.64 cuando sólo esperaba 66.66; y el agente 3 recibe un beneficio neto de 114.23 cuando sólo esperaba 83.33. Más aún, cada agente obtiene la misma proporción de lo que él cree que cada objeto vale. En la siguiente tabla se observa este hecho que era de esperarse por estar la solución en proporción con A.

Objetos	*Agente 1 (%)*	*Agente 2 (%)*	*Agente 3 (%)*
1	13.15 (52.6)	10.52 (52.6)	26.32 (52.6)
2	32.97 (43.96)	79.12 (43.96)	87.91 (43.96)
Total	46.12 (46.12)	89.64 (44.82)	114.23 (45.69)

Este procedimiento resulta ser muy útil cuando los métodos de alternancia fallan, es decir, cuando la cantidad de objetos es menor a la cantidad de agentes, añadiendo el factor del pago por parte de los agentes que obtienen una mayor ganancia.

Consideremos, ahora, el caso en el que los agentes tienen derechos distintos sobre los objetos. Así, sea α_i el porcentaje al que el agente i tiene derecho del total de los objetos (e.g. una persona al morir deja de herencia el 60% de sus bienes a su mujer, y 20% a cada uno de sus dos hijos, con lo que tendríamos $\alpha_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 0.2$, $\alpha_3 = 0.2$).

Definición 49 *Diremos que el vector $\alpha \in \mathbb{R}^n$ es un vector de pesos, si y sólo si $a_i > 0$ para toda $i \in N$ y $\sum_{i \in N} \alpha_i$.*

Definición 50 *Diremos que una familia $\{u(P), x(P) : P \subseteq \Delta\}$ de soluciones para* (N, Δ, A) está en $\alpha-$proporción con A*, si y sólo si*

$$(\phi_j(P) - \phi_j(P \diagdown \{k\}))\alpha_j a_{kj} = (\phi_j(P) - \phi_j(P \diagdown \{k\}))\alpha_i a_{ki}$$

para cada $i, j \in N$ y $k \in P$.

De esta forma, respetamos la noción intuitiva del porcentaje de derecho, en la que el porcentaje recibido por el agente i dividido entre α_i debe ser constante. De manera semejante tenemos el siguiente lema.

Lema 51 *Sea $\{(u(P), x(P)) : P \subseteq \Delta\}$ una familia de soluciones para (N, Δ, A) en $\alpha-$proporción con A y $m(P) = \sum_{j \in N} \varphi_j(P)$ entonces*

(a) $\varphi_i(P) = \varphi_i(P \diagdown \{k\}) + [m(P) - m(P \diagdown \{k\})]\alpha_i a_{ki} / \sum_{j \in N} \alpha_j a_{kj}$*, para cada $P \subseteq \Delta$ y $k \in P$.*

(b) $m(P) = \sum_{k \in P} m(\{k\})$.

(c) *Más aún, si la familia es óptima de Pareto, entonces $m(\{k\}) = \max_{i \in N} a_{ki}$ para cada $k \in \Delta$.*

La demostración de este lema es muy similar a la de su equivalente cuando se consideró que los agentes tienen los mismos derechos. Asimismo tenemos el teorema anterior usando la noción de derechos heterogéneos.

Teorema 52 *La familia de soluciones $\{(u(P), x(P)) : P \subseteq \Delta\}$ para (N, Δ, A) está en $\alpha-$proporción con A y cada $(u(P), x(P))$, $P \subseteq \Delta$ es óptima de Pareto si y sólo si para toda $P \subseteq \Delta$, $u(P)$ proviene de los mejores postores y*

$$x_i = \sum_{k \in \Delta} \left[c_k \frac{\alpha_i a_{ki}}{\sum_{j \in N} \alpha_j a_{kj}} \right] - u_i(P) \tag{2.10}$$

De nuevo, la demostración es muy similar a su contraparte con derechos iguales.

Ejemplo 53 *(Continuación) Del ejemplo anterior, supongamos que los agentes* 1, 2 *y* 3 *tienen los derechos* 0.2, 0.7 *y* 0.1 *respectivamente sobre el total de objetos. Como antes, tendremos que* $u^T = (0,0,250)$ *y la compensación monetaria en esta ocasión estará dada por*

$$\begin{aligned} x = & \frac{50}{0.2 \cdot 25 + 0.7 \cdot 20 + 0.1 \cdot 50} \begin{pmatrix} 0.2 \cdot 25 \\ 0.7 \cdot 20 \\ 0.1 \cdot 50 \end{pmatrix} \\ & + \frac{200}{0.2 \cdot 75 + 0.7 \cdot 180 + 0.1 \cdot 200} \begin{pmatrix} 0.2 \cdot 75 \\ 0.7 \cdot 180 \\ 0.1 \cdot 200 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 29.05 \\ 185.689 \\ -214.74 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos resumir la solución obtenida en la siguiente tabla.

$\diagdown$	Agente 1	Agente 2	Agente 3
α	0.2	0.7	0.1
Cantidad recibida en objetos (u)	0	0	250
Cantidad recibida en dinero (x)	29.05	185.69	−214.74
Total del valor de los objetos	100	200	250
Asignación esperada ($\alpha_i \cdot total$)	20	140	25
Asignación total	29.05	185.69	35.26
Porcentaje asignado	29.05	92.85	14.10

Ahora podemos modificar la definición de estar en proporción con A para obtener una solución en la que cada agente obtenga el mismo porcentaje del valor que considera que el total de objetos tiene. Más aún, este porcentaje es el máximo que se puede garantizar para todos los agentes. Denotemos por $v \in \mathbb{R}^n$ un vector cuya $j-$ésima entrada es el valor asignado por el agente j al total de los objetos, es decir, $v_j = \sum_{i \in \Delta} a_{ij}$.

Definición 54 *Diremos que la solución* (u, x) está en proporción con v*, si y sólo si*

$$(u_i + x_i)v_j = (u_j + x_j)v_i$$

para cada $i, j \in N$.

De nuevo, cuando se tienen derechos distintos para los agentes, podemos definir la proporción pesada.

Definición 55 *Diremos que la solución* (u, x) está en $\alpha-$proporción con v*, si y sólo si*

$$(u_i + x_i)\alpha_j v_j = (u_j + x_j)\alpha_i v_i \tag{2.11}$$

para cada $i, j \in N$*.*

Y de aquí se desprenden los dos teoremas siguientes.

Teorema 56 *La solución* (u, x) *es óptima de Pareto y en proporción con* v*, si y sólo si* u *proviene de los mejores postores y* $x = ((\iota^T u)/(\iota^T v))v - u$*, donde* ι *denota el vector columna de* n *unos.*

Demostración. Supongamos que la solución (u, x) es óptima de Pareto y en proporción con v. Sabemos que u proviene de los mejores postores sí y sólo si es óptima de Pareto, por lo que sólo resta demostrar que $x = ((\iota^T u)/(\iota^T v))v - u$. Si tomamos la suma sobre las $i \in N$ para las ecuaciones en (2.11), obtenemos que

$$\sum_{i \in N} (u_i + x_i)v_j = (\iota^T u + 0)v_j = (u_j + x_j)\iota^T v = (u_j + x_j)\sum_{i \in N} v_i$$

y de aquí se sigue que $((\iota^T u)/(\iota^T v))v_j = u_j + x_j$, de donde obtenemos la identidad deseada $x = ((\iota^T u)/(\iota^T v))v - u$.

Para el converso, supongamos que $x = ((\iota^T u)/(\iota^T v))v - u$ donde u proviene de los mejores postores, y por tanto es óptima de Pareto. Observemos que

$$\iota^T x = \frac{\iota^T u}{\iota^T v}\iota^T v - \iota^T u = 0$$

por lo que (u, x) si es una solución, pues el vector x es realmente un vector de pagos. Ahora, a partir de las coordenadas i y j del vector x, obtenemos que

$$\frac{u_i + x_i}{v_i} = \frac{\iota^T u}{\iota^T v} = \frac{u_j + x_j}{v_j}$$

por lo que la solución (u, x) está en proporción con v. ∎

Teorema 57 *La solución* (u, x) *es óptima de Pareto y en* $\alpha-$*proporción con* v*, si y sólo si* u *proviene de los mejores postores y* $x = ((\iota^T u)/(\alpha^T v))\widehat{\alpha} v - u$*, donde* ι *denota el vector columna de* n *unos y* $\widehat{\alpha}$ *denota a la matriz diagonal correspondiente al vector* $\alpha \in \mathbb{R}^n$*.*

La demostración es muy similar a la demostración del lema anterior. Prosigamos con el análisis del ejemplo.

Ejemplo 58 *(Continuación) Calculemos la solución en proporción con v y ya no con A, como antes. De esta forma, los dos objetos son asignados al agente 3, puesto que él es el mejor postor en ambos casos. Así, tenemos los dos vectores $u^T = (0, 0, 250)$ y $v^T = (100, 200, 250)$. La compensación monetaria está dada, en esta ocasión, por*

$$x = \frac{250}{550}\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 250 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45.45 \\ 90.90 \\ -136.35 \end{pmatrix}$$

en el caso de derechos iguales, y por

$$\begin{aligned} x = \frac{250}{0.2 \cdot 100 + 0.7 \cdot 200 + 0.1 \cdot 250} &\begin{pmatrix} 0.2 \cdot 100 \\ 0.7 \cdot 200 \\ 0.1 \cdot 250 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 250 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27.03 \\ 189.19 \\ -216.21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos resumir la solución obtenida en la siguiente tabla.

╲	Agente 1	Agente 2	Agente 3
α	0.2	0.7	0.1
Cantidad recibida en objetos (u)	0	0	250
Cantidad recibida en dinero (x)	45.45	90.90	−136.35
Asignación esperada	33.33	66.67	83.33
Asignación total	45.45	90.90	113.65
Porcentaje asignado	45.45	45.45	45.45
Total del valor de los objetos (v)	100	200	250
Cantidad recibida en dinero (α)(x)	27.03	189.19	−216.21
Asignación esperada ($\alpha_i \cdot total$)	20	140	25
Asignación total	27.03	189.19	33.79
Porcentaje asignado	27.03	94.59	13.51

2.4.3 Procedimiento del Ganador Ajustado

La principal problema que se tiene con los métodos de alternancia es que los agentes pueden no beneficiarse en el mismo grado, haciendo que la asignación no sea equitativa. En la sección anterior analizamos una forma de lograr que los agentes obtuvieran, ya sea el mismo porcentaje de cada objeto, o el mismo porcentaje del total de objetos.

Sin embargo, en muchas ocasiones la persona no dispone de dinero para realizar una oferta en la subasta y por consiguiente no cuenta con el poder de realizar una compensación monetaria adecuada. Para estos casos se utiliza el procedimiento que se detalla en esta sección, que resulta ser un procedimiento que es eficiente, equitativo y libre de envidias para dos agentes.

Como en la sección anterior, y contrario a los métodos de alternancia, en el procedimiento del *Ganador Ajustado* (GA) se debe asignar un valor numérico a cada objeto a repartir, pero en este caso, el valor numérico no tiene por qué tener que ver con el valor monetario del artículo en cuestión. La idea principal detrás del procedimiento del GA, radica en proporcionar a cada agente con 100 puntos que debe asignar entre el total de objetos, asignando más puntos a los objetos que él más valora, usualmente representando el valor porcentual que el objeto tiene para el agente. Esta información no debe ser publicada sino hasta que todos los objetos hayan sido evaluados por todos los agentes.

Para continuar la explicación del GA, lo mejor es hacerlo construyendo paulatinamente un ejemplo.

Ejemplo 59 *Supongamos que tenemos el problema de división justa* $(\{A, B\}, \{1, 2, 3, 4, 5\})$, *y que los agentes han repartido sus* 100 *puntos de la siguiente forma.*

Objeto	*Agente A*	*Agente B*
1	50	40
2	20	30
3	15	10
4	10	10
5	5	10
Total	100	100

El procedimiento comienza, luego, a asignar los objetos que más se valoran en proporción de la siguiente forma:

1. Se evalúa el cociente $\frac{\text{Puntos asignados por } A}{\text{Puntos asignados por } B}$ de cada objeto, y se asigna el objeto con mayor cociente a A.

2. Mientras el total de puntos que tenga el agente B sea menor que el del agente A, se le asigna a B el objeto con el menor cociente.

3. Cuando el agente A tiene menos puntos que B, es de nuevo su turno para recibir el objeto con el mayor cociente de los objetos que quedan.

4. Al final, habrá a lo más un objeto que al asignarlo deje al agente que lo obtiene en ventaja sobre el otro.

Ejemplo 60 *(Continuación) Lo primero que ocurre es que se asigna el objeto* 3 *al agente* A *por ser el que mayor cociente (*1.5*) tiene. El agente* A *tiene un total de* 15 *puntos.*

Posteriormente, B *obtiene el objeto* 5*, pues su cociente es el menor (*0.5*). El agente* B *tiene* 10 *puntos, y por lo tanto recibe otro objeto.*

El agente B *obtiene el objeto* 2*, su cociente es el menor de lo que queda sin repartir (*0.66*). Con esto, tiene un total de* $10 + 30 = 40$ *puntos.*

El agente A *obtiene el objeto* 1*, pues su cociente es de* 1.25*. Ahora* A *tiene un total de* $15 + 50 = 65$*.*

El agente B*, para finalizar la asignación, obtiene el objeto* 4*, con lo que tiene un total de* $10 + 30 + 10 = 50$ *puntos.*

El objeto que al asignarlo deja en desventaja al jugador que no lo recibe resulta ser, en este caso, el objeto 1, es decir, el último objeto asignado tal que ya no pudo el otro agente igualar el porcentaje adquirido por el contrincante. Si el objeto 1 se lo quedara al agente B, entonces se tendría que A tendría 15 puntos y B tendría 90, es por esta razón que este objeto es el que no puede ser asignado.

El siguiente paso en el GA es el de igualación. Digamos que T_i es el total de puntos que el agente i tiene (excluyendo el objeto en disputa), y sea v_i el valor que el agente i le asigna al objeto en disputa. El GA indica, ahora, que se encuentre un número $\lambda \in [0, 1]$ de tal forma que

$$T_A + \lambda v_A = T_B + (1 - \lambda) v_B \tag{2.12}$$

Que equivale a pensar que se vende el objeto en disputa, y se les entrega el valor monetario de ese objeto a los agentes A y B con la proporción λ y $1 - \lambda$, respectivamente.

Ejemplo 61 *(Final) Para el ejemplo,* $T_A = 15$*,* $T_B = 50$*,* $v_A = 50$ *y* $v_B = 40$*. De esta forma,* $\lambda = \frac{5}{6}$*, pues*

$$T_A + \lambda v_A = 15 + \frac{5}{6}50 \approx 56.67 \approx 50 + \frac{1}{6}40 = T_B + (1 - \lambda) v_B$$

Por construcción de la solución, los porcentajes al final se igualan, además de que siempre se asigna al menos 50% a cada agente, lo que convierte a la solución en equitativa y libre de envidias. Se le deja al lector comprobar que, en efecto, la solución es eficiente (y óptima de Pareto).

La generalización de este procedimiento al caso en el que los agentes tienen distintos derechos sobre el total es directa. Simplemente se compara el cociente de los totales de cada agente en vez de comparar los totales directamente. Esto es, si los derechos son α_A y α_B ($\alpha_A + \alpha_B = 1$), se cambia la ecuación (2.12) por

$$\frac{T_A + \lambda v_A}{\alpha_A} = \frac{T_B + (1 - \lambda) v_B}{\alpha_B}$$

Ejemplo 62 *Supóngase que la asignación de puntos para los agentes es la misma que en el ejemplo anterior, pero en este caso A tiene derecho a* $\frac{3}{5}$ *del total y B sólo a* $\frac{2}{5}$*. El cociente de los derechos es* $\frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{3/5}{2/5} = \frac{3}{2}$.

Así, el objeto 3 *se le asigna a* A. A *tiene* 15 *puntos. (Sigue* B*).*

El objeto 5 *se le asigna a* B. B *tiene* 10 *puntos. El cociente de los puntos es* $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. *(Sigue* A*).*

El objeto 1 *se le asigna a* A. A *tiene* 65 *puntos. El cociente de los puntos es* $\frac{65}{10} > \frac{3}{2}$. *(Sigue* B*).*

El objeto 2 *se le asigna a* B. B *tiene* 40 *puntos. El cociente de los puntos es* $\frac{65}{40} > \frac{3}{2}$. *(Sigue* B*).*

El objeto 4 *ya no puede ser asignado a ninguno de los dos. Así, se encuentra* λ *tal que satisfaga la ecuación.*

$$\frac{65 + \lambda 10}{3/5} = \frac{40 + (1-\lambda)10}{2/5}$$

y resulta que la solución es $\lambda = \frac{2}{5}$*, con lo que* A *obtiene* 69 *y* B *obtiene* 46. *Observemos que* $\frac{69}{46} = \frac{3}{2}$*, que era lo que esperábamos.*

Dado que el procedimiento del GA es exclusivamente para dos agentes, es posible tener las tres propiedades básicas que consideramos como justas en un problema: es de mínima justicia, es libre de envidias y óptima de Pareto; pero como ya habíamos visto anteriormente, estas tres propiedades no se pueden conjugar en general cuando el número de agentes es mayor que dos. Es por esta razón que si desea efectuar una generalización de este procedimiento, es imperativo decidir cuál de las propiedades hemos de perder.

En el siguiente capítulo se explora una generalización de este resultado como el objetivo principal de esta tesis, pero antes de ello procederemos a analizar otro tipo de procedimientos para repartición, para el caso en el que el conjunto de objetos no es discreto.

2.5 Reparticiones de Objetos Continuos

Durante los últimos 50 años, el enfoque de división justa se ha intensificado en el estudio de objetos continuos (i.e. subconjuntos de $\mathbb{R}^n$). Para fines de esta sección llamaremos a Δ un pastel, dada su obvia analogía con las situaciones reales en las que se desea cortar, efectivamente, un pastel para repartirlo entre un conjunto de agentes.

En esta sección nos enfocaremos en los procedimientos llamados de *cuchillos móviles*. La evolución de los resultados de división justa hasta la fecha han sido muy semejantes:

primero se estipula un teorema de existencia (Neyman y Barbanel, por ejemplo); luego se encuentra un esquema de cuchillos móviles; y finalmente se propone un procedimiento discreto o finito.

Como ya hemos visto en secciones anteriores, se ha tenido cierto éxito en la formulación de teoremas de existencia, y en los casos de objetos discretos, de forma natural se han encontrado procedimientos finitos. En el caso de objetos continuos, por el contrario, el mayor éxito y los mayores avances en procedimientos ha sido a través de los esquemas de cuchillos móviles, sin mucho éxito en las propuestas de procedimientos discretos.

Los procedimientos constan de una serie de reglas seguidas por una estrategia entre corchetes [] que se pueden pensar como los que haría un agente si fuera sincero. Las reglas pueden ser aplicadas por un árbitro, pues no requieren que conozca las preferencias de ningún agente, mientras que las estrategias sugeridas requiere la preferencia del agente, pero puede ignorar el resto de las preferencias.

En esta sección estamos interesados en analizar las propiedades que los procedimientos pueden asegurar a los agentes en su asignación, es por esta razón que se considera que los agentes serán sinceros y seguirán las estrategias entre corchetes.

Uno de los procedimientos discretos más conocidos es el llamado procedimiento del *último cortador*, debido a Stefan Banach y Bronislaw Knaster. Bajo este procedimiento para n agentes, la primera persona corta un trozo del pastel [de manera que considere que lo que cortó es de tamaño $\frac{1}{n}$]. Este trozo es posteriormente pasado a cada uno de los demás agentes. En su turno, el agente puede pasar el trozo a otro agente sin alterarlo [si considera que el trozo es de tamaño al menos $\frac{1}{n}$] o disminuirlo [hasta el tamaño $\frac{1}{n}$ si considera que mide más] y luego pasar uno de los trozos cortados (el otro se reincorpora al pastel). El último agente en hacer una disminución al trozo es el agente que lo obtiene como su asignación (o el primero si ningún otro agente cortó). El procedimiento continúa con el resto de los agentes y el pastel.

Se puede verificar que si un agente sigue la estrategia entre corchetes, entonces el agente garantiza que su trozo es de tamaño al menos $\frac{1}{n}$, sin importar la estrategia seguida por los demás agentes.

Este procedimiento es de mínima justicia, pero falla ser libre de envidias y eficiente, de hecho ni siquiera es equitativo. La rezón por la que no es libre de envidias es que una vez que un jugador ha obtenido su trozo, para todo fin práctico está fuera de la repartición, así que no importa que posteriormente observe un trozo mayor al suyo ser asignado, no hay nada que pueda hacer. La falla en la equitatividad se puede observar de la misma forma, así como en la optimalidad de Pareto.

2.5.1 Esquemas de Cuchillos Móviles

Parece ser que los esquemas de cuchillos móviles fueron propuestos por primera vez en 1961 por Lester Dubins y Edwin Spanier, cuando presentaron esta versión del procedimiento de Banach-Knaster.

Procedimiento 63 (DS) *Un cuchillo se mueve a lo largo de un pastel, digamos de izquierda a derecha. En cualquier momento, un agente puede pedir* corte *[cuando considere que el trozo a la izquierda del cuchillo es de medida* $\frac{1}{n}$*], y recibir el trozo a la izquierda del cuchillo. En el caso de que dos o más agentes pidan corte al mismo tiempo, un procedimiento aleatorio asigna el trozo. En caso de que ningún agente pida corte, se asigna de manera aleatoria el pastel entre los agentes.*

Es fácil observar en este procedimiento que si un agente sigue la estrategia entre corchetes, entonces garantiza obtener al menos $\frac{1}{n}$ del total de pastel.

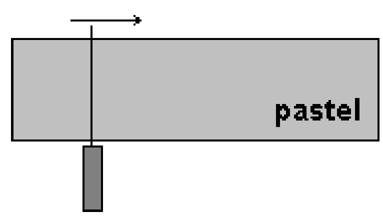


FIGURA 2.2. Procedimiento de Dubins-Spanier.

Por otro lado, en general los procedimientos de cuchillos móviles tienden a asignar trozos con la mínima cantidad de cortes, a diferencia de los procedimientos discretos, en los que un agente puede recibir un trozo que consista en varios pedazos que originalmente se encontraban muy lejos en el pastel.

A continuación veremos una manera de lograr una asignación uniforme entre dos agentes. Este procedimiento, debido a A. K. Austin, se puede considerar como la realización en esquemas de cuchillos del teorema de Neyman antes visto. Lo que se pretende, es encontrar dos trozos del pastel que ambos agentes consideren que miden $\frac{1}{2}$ cada uno.

Procedimiento 64 (A) *Un cuchillo se mueve de izquierda a derecha, como en el procedimiento (DS), hasta que uno de los agentes, digamos el primero, pide* alto *[cuando considera que el pastel está dividido en dos partes iguales]. A partir de ese momento, se coloca un segundo cuchillo en la esquina izquierda del pastel. El primer agente procede a mover los dos cuchillos hacia la derecha [de tal forma que siempre haya* $\frac{1}{2}$ *del pastel entre los dos cuchillos], de manera que ningún cuchillo se mueva nunca hacia la izquierda, y que al finalizar el segundo cuchillo esté en el punto en donde el* *agente pidió* alto*. En algún momento intermedio, el segundo agente pide* corte *[cuando considera que la parte entre los dos cuchillos vale exactamente $\frac{1}{2}$].*

De esta forma el pastel quedó dividido en dos trozos de igual tamaño para ambos agentes.

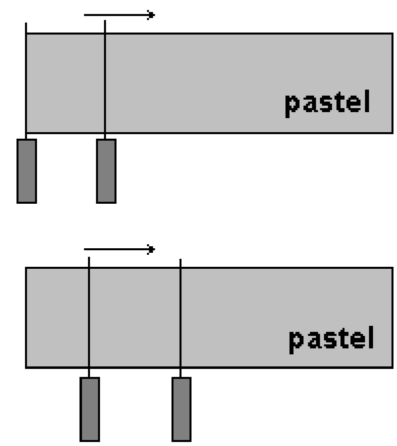


FIGURA 2.3. Procedimento de Austin: entre los cuchillos siempre hay 1/2 para el agente 1

Observemos que lo que garantiza que habrá un punto para el segundo agente en el que entre los dos cuchillos habrá la mitad del pastel, es el hecho de que el punto donde se detiene el primer cuchillo es el punto en el que se detiene el segundo cuchillo al final. En ese caso, el segundo agente considera que el trozo de la izquierda es menor que la mitad (si siguió la estrategia), y por ello debe considerar al otro trozo mayor, y por continuidad hay algún punto intermedio en el que son iguales.

Aún no se conoce generalización del procedimiento de Austin para más de dos agentes, sin embargo, existe un procedimiento que puede hacer que dos agentes consideren que un trozo vale exactamente $\frac{1}{k}$ para cualquier k. El procedimiento es como sigue.

Procedimiento 65 (Ak) *El primer agente hace una serie de $k-1$ marcas en el pastel [de tal forma que considera que el pastel está dividido en k trozos de medida $\frac{1}{k}$]. Ahora, el segundo agente no puede pensar que todos los trozos son menores que $\frac{1}{k}$ ni que todos son mayores, por lo tanto, o considera que al menos uno vale $\frac{1}{k}$ en cuyo caso ya terminamos, o bien, piensa que un trozo vale más y otro vale menos de $\frac{1}{k}$. Ahora unen esos dos trozos y aplican (A) a ese nuevo pastel, para obtener un trozo que para ambos mida exactamente $\frac{1}{k}$.*

Si iteramos este procedimiento, podemos lograr que dos agentes partan el pastel en k trozos de tamaño exactamente $\frac{1}{k}$ para ambos. A partir de estos procedimientos se pueden generar nuevos esquemas de cuchillos móviles con propiedades interesantes.

Procedimiento 66 (AF) *Se tienen tres agentes, los agentes* 1 *y* 2 *dividen el pastel con el procedimiento (A) [en dos trozos,* A *y* B*, que valen exactamente la mitad para ambos]. Los agentes* 1 *y* 3 *cortan un trozo* $A\prime$ *de* A *[que ambos piensan que vale exactamente* $\frac{1}{3}$*]. De forma análoga, los agentes* 2 *y* 3 *cortan un trozo* $B\prime$ *de* B *[de forma que piensan que vale* $\frac{1}{3}$*]. Los trozos son asignados así: el agente* 1 *recibe* $A\diagdown A\prime$*; el agente* 2 *recibe* $B\diagdown B\prime$*; y el agente* 3 *recibe* $A\prime \cup B\prime$*.*

Observemos que los tres agentes creen haber obtenido exactamente $\frac{1}{3}$ del total. Este procedimiento es equitativo, pero no es libre de envidias, pues el agente 3 puede envidiar a alguno de los otros agentes (en particular si piensa que A vale más que B, envidia al agente 1).

Aún cuando este procedimiento no es libre de envidias, tiene la ventaja de ser fácilmente generalizable a más agentes. Si una cuarta persona llegara, cada uno de los tres agentes, simplemente corta un trozo de su asignación [de tal forma que entre él y el cuarto agente crean que vale exactamente de ese trozo $\frac{1}{4}$]. El cuarto agente obtiene la unión de esos trozos.

A continuación analizaremos uno de los esquemas de cuchillo libre de envidias más conocidos, pero más complicados, debido a Walter Stromquist. A diferencia de todos los otros procedimientos vistos hasta ahora, en este caso se requiere de un árbitro que sostenga un cuchillo y cada agente sostiene otro.

Procedimiento 67 (St) *El árbitro mueve un cuchillo desde la esquina izquierda hasta la derecha. Cada agente sostiene un cuchillo a la derecha del árbitro [de tal forma que crea que está dividiendo el trozo a la derecha del cuchillo del árbitro exactamente por la mitad]. En cualquier momento, un agente puede pedir* corte *[cuando considere que el trozo a la izquierda del cuchillo del árbitro mide al menos tanto como el mayor de* Y *y* Z*] (*X *en la figura). El árbitro realiza un corte, y otro corte se hace en el cuchillo que haya quedado en medio de los tres cuchillos de los agentes (el trozo más cercano al árbitro se denomina* Y *y el otro* Z*, en la figura). La asignación es como sigue: el agente que pidió corte recibe el trozo* X*; de los otros agentes, el que tenga el cuchillo más cercano al del árbitro recibe* Y*; y el otro recibe* Z*.*

Si se sigue la estrategia, el agente que pide *corte* no envidia, pues el considera que obtiene el trozo al menos empatado en tamaño del más grande. El agente que obtiene Y no envidia, pues considera que X es menor que Y o Z, y como está obteniendo al menos la mitad de $Y \cup Z$, no envidia (sea que su cuchillo fuera el primero o el de en

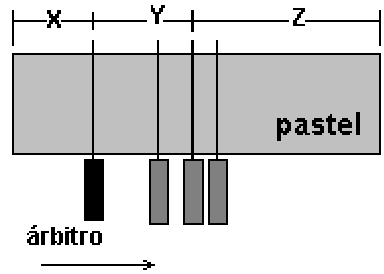


FIGURA 2.4. Procedimiento de Stromquist

medio, pues no puede ser el último). El último agente no envidia por la misma razón que el anterior.

Como mencionamos con anterioridad, al unir varios procedimientos de pueden obtener nuevos esquemas de cuchillos, en este caso, William Webb utilizó tanto el procedimiento de Dubins-Spanier como el de Austin para obtener un esquema de cuchillos para tres personas que es libre de envidias.

Procedimiento 68 (W) *Un cuchillo se mueve de izquierda a derecha, como en el procedimiento (DS), hasta que un agente, digamos el* 1*, pide* corte *[cuando considera que el trozo a la izquierda del cuchillo es de tamaño* $\frac{1}{3}$*]. Llamémosle a ese trozo* A_1*. Ahora, los agentes* 1 *y* 2 *utilizan el procedimiento (A) para dividir el resto del pastel en dos trozos,* A_2 *y* A_3*, [que midan exactamente la mitad del resto para ambos]. Ahora los agentes escogen en este orden: primero el agente* 3*, luego el agente* 2 *y al final el agente* 1 *[escogiendo el trozo que consideren mayor].*

Observemos que los agentes 2 y 3, al momento del corte, piensan que el trozo A_1 vale a lo más $\frac{1}{3}$. Además, si se sigue la estrategia, se tiene que el agente 1 considera a los tres trozos del mismo tamaño. El agente 2 considera que A_2 y A_3 miden igual, y al menos $\frac{1}{3}$. Así, el agente 3 no envidia a nadie pues es el primero en escoger. El segundo no envidia pues tenía dos trozos empatados por el mayor. Y, finalmente, el primero no envidia porque para él, todos los trozos valen $\frac{1}{3}$.

Para finalizar, analizaremos una forma muy fácil de obtener una asignación libre de envidias basada en el procedimiento (Ak).

Procedimiento 69 (A3) *Los agentes* 2 *y* 3 *cortan el pastel en tres pedazos con el procedimiento (Ak) [de tal forma que los tres pedazos sean de tamaño* $\frac{1}{3}$ *para ambos agentes]. Ahora los agentes escogen sus trozos en el siguiente orden: primero escoge el agente* 1*, luego el* 2*, y finalmente el* 3 *[de manera que toman el trozo que consideren más grande].*

Observemos que, como en el procedimiento (W), no hay envidias. El primer agente no envidia porque escoge primero, el segundo y el tercero no envidian porque para ellos todos los trozos valen igual.

De hecho, si existiera una generalización del procedimiento (A) para n agentes, o algún esquema que garantice una asignación uniforme, se tendría un esquema de cuchillos móviles para $n+1$ agentes, procediendo como en el (A3): Comenzamos como en el procedimiento (DS) para obtener un trozo que un agente, digamos el 1, considera de tamaño exactamente $\frac{1}{n+1}$ y el resto de los agentes considera de tamaño a lo más $\frac{1}{n+1}$. Ahora hacemos que el agente 1, junto con $n-1$ agentes utilicen el esquema para obtener una asignación uniforme de n trozos con el resto del pastel. El agente que no participó en el esquema uniforme, escoge primero, mientras que el agente 1 escoge hasta el final. Este procedimiento es libre de envidias por la misma razón que (A3) lo es.

Existen procedimientos que llevan a una asignación libre de envidias para cuatro agentes; sin embargo, hasta el momento no se conoce ningún esquema de cuchillos móviles para cinco agentes o más. Por otro lado, existen algunos procedimientos discretos para cuatro o más agentes, pero su complejidad es mucho mayor a los procedimientos para tres o menos agentes. Steven Brams, Alan Taylor y William Zwicker demostraron que si existiera un esquema de cuchillos que lograra dividir un pastel en dos trozos entre tres agentes, de tal forma que los tres pensaran que estaba dividido por la mitad, entonces existe un esquema libre de envidias para cinco agentes.

3

Generalización del Procedimiento del Ganador Ajustado

El problema que vamos a tratar en este capítulo es el siguiente: se tiene un conjunto de agentes $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ que se ha de dividir el conjunto $\Delta \subset \mathbb{R}^m$. Cada agente tiene sus propias preferencias sobre los subconjuntos de Δ, que se denotarán por medio de una familia de funciones f_i. Se busca dividir Δ entre los agentes de tal manera que, aprovechando la información contenida en las funciones f_i los agentes queden satisfechos, y todos crean, en su propia medida, obtener al menos $1/n$ del total que Δ vale para ellos.

Formalmente, podemos considerar el problema como la terna $(N, \Delta, \{f_i\}_{i \in N})$, donde N es un conjunto finito de agentes, Δ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^m$, y, para cada agente $i \in N$, $f_i : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ es una función integrable que representa su valoración, en el sentido de que, dado un subconjunto $B \subseteq \Delta$, $\int_B f_i(x)dx$ es el valor que el agente i asigna a B. Requeriremos, además, que siempre que B tenga medida de Lebesgue positiva, $\int_B f_i(x)dx > 0$. Suponemos que los agentes tienen los mismos derechos sobre el conjunto Δ, que puede ser pensado como un pastel, como en el capítulo anterior.

3.1 Modelo para n agentes

Dada la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$, denotando a los Borelianos del conjunto Δ, definiremos el porcentaje que le asigna el agente i a $B \subseteq \mathcal{B}$, como

$$m_i(B) = \frac{\int_B f_i(x)dx}{\int_\Delta f_i(x)dx}$$

Como hemos visto hasta ahora, es posible aprovechar que los agentes valoran de distinta forma el conjunto Δ para lograr que los agentes crean obtener más de $\frac{1}{n}$ del total. Además, no es posible, en general, combinar los resultados de libre de envidias y optimalidad de Pareto. Por esta razón, en esta propuesta de solución deseamos maximizar el porcentaje del agente que obtiene el menor porcentaje. En decir, proponemos una solución $E \in P_n(\Delta)$ dada por el argumento que resuelve

$$\max_{F \in P_n(\Delta)} \min\{m_i(F_i) : i \in N\} \tag{3.1}$$

donde $P_n(\Delta)$ denota el conjunto de todas las particiones ordenadas con n elementos del conjunto Δ. Bajo esta solución, el subconjunto F_i es asignado al agente i. El propósito de este capítulo es demostrar la existencia de una solución equitativa y óptima de Pareto para el problema $(N, \Delta, \{f_i\}_{i\in N})$.

Por una $n-$partición de Δ entenderemos una $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$ con $F_i \in \mathcal{B}$, tal que cumpla las propiedades de solución ($\cup_{i\in N} F_i = \Delta$ y $int(F_i) \cap int(F_j) = \emptyset$ si $i \neq j$ como en (2.1)).

Queremos asignar a cada problema $(\Delta, N, \{f_i\}_{i\in N})$ una $n-$partición $F \in P_n(\Delta)$. Es en este sentido que usaremos indistintamente los términos de solución y partición.

Podemos redefinir las nociones de mínima justicia, equitativa y óptima de Pareto en términos de este problema.

Definición 70 *Una solución $F \in P_n(\Delta)$ se dice que es de* mínima justicia *si y sólo si $m_i(F_i) \geq \frac{1}{n}$ para cada $i \in N$.*

Definición 71 *Una solución $F \in P_n(\Delta)$ se dice que es* equitativa *si y sólo si $m_i(F_i) = m_j(F_j)$ para cada $i, j \in N$.*

Definición 72 *Una solución $F \in P_n(\Delta)$ se dice que es* óptima de Pareto *si y sólo si no existe otra solución $\widetilde{F} \in P_n(\Delta)$ tal que $m_i(\widetilde{F_i}) \geq m_i(F_i)$ para cada $i \in N$, con al menos una de las desigualdades siendo estricta.*

En la siguiente sección, proponemos una generalización que conserva las características principales del GA: equitatividad y optimalidad de Pareto.

3.2 El Caso con Igualdad de Derechos

Como antes, $\lambda(A)$ es la medida de Lebesgue asignada al conjunto $A \subset \mathbb{R}^m$. A continuación tenemos unas definiciones que servirán para construir la solución propuesta.

Definición 73 *Dada $\eta \in \mathbb{R}^n_+$, definimos*

$$E_i(\eta) = \{x \in \Delta : \eta_i \frac{f_i(x)}{\int_\Delta f_i(x)dx} \geq \eta_j \frac{f_j(x)}{\int_\Delta f_j(x)dx} \text{ para cada } j \neq i\}$$

El conjunto $E_i(\eta)$ servirá para definir la solución como el óptimo de una función evaluada en η. Podemos observar que en realidad, η puede ser restringida al $(n-1)-$simplejo, pues $E_i(\eta) = E_i(\gamma\eta)$ para toda $\gamma \in \mathbb{R}_+$. El conjunto $E_i(\eta)$ representa lo que obtendría el agente i si estuvieran los agentes repartiéndose los objetos de acuerdo a una subasta pesada, con peso η.

Definición 74 *Diremos que $\{f_i : \Delta \to \mathbb{R}\}_{i \in N}$ es una* familia genérica sobre Δ *si y sólo si la familia $\{f_i\}_{i\in N}$ es linealmente independiente, tomada por pares, sobre todo subconjunto de medida positiva de Δ.*

Estas definiciones reconstruyen la idea de calcular las asignaciones en el GA, sólo que para un número arbitrario de agentes. De hecho, el ganador ajustado, hasta antes del paso de igualación, se puede pensar como un problema de división justa en donde el mejor postor se lleva los objetos, sólo que sus apuestas están siendo reescaladas. Veamos esto con un ejemplo del GA.

Ejemplo 75 *Supongamos que tenemos el problema $(\{A, B\}, \{1, 2, \ldots, 8\})$ y los agentes reparten sus puntos de la siguiente manera*

$\diagdown$	*Agente A*	*Agente B*
Objeto 1	4	**32**
Objeto 2	17	11
Objeto 3	**40**	25
Objeto 4	**6**	3
Objeto 5	16	**14**
Objeto 6	3	**8**
Objeto 7	**10**	2
Objeto 8	4	**5**
Total	100	100

El GA obtendría la asignación, para A, $\{3, 4, 7\}$, y para B, $\{1, 5, 6, 8\}$; con el objeto 2 estando en disputa. Observemos que esto es equivalente a reescalar las ofertas del *agente A por el factor* 0.8*, y obtener el mejor postor:*

$\diagdown$	$(Agente\ A)*0.8$	$Agente\ B$
Objeto 1	3.2	**32**
Objeto 2	13.6	11
Objeto 3	**32**	25
Objeto 4	**4.8**	3
Objeto 5	12.8	**14**
Objeto 6	2.4	**8**
Objeto 7	**8**	2
Objeto 8	3.2	**5**
Total	80	100

Ahora proponemos el candidato para solución como

$$\widehat{\eta} = \arg \max_{\eta \in \mathbb{R}^n_+} \min\{m_i(E_i(\eta)) : i \in N\} \tag{3.2}$$

es decir, tomar la mejor asignación posible de entre las asignaciones de mejor postor reescalado.

Proposición 76 *Para cada $S \subseteq E_i(\widehat{\eta})$ tenemos que $\widehat{\eta}_i m_i(S) \geq \widehat{\eta}_j m_j(S)$ para cada $j \neq i$.*

Demostración. Observemos que

$$\widehat{\eta}_i m_i(S) = \widehat{\eta}_i \frac{\int_S f_i(x)dx}{\int_\Delta f_i(x)dx}$$

Pero dado que $S \subseteq E_i(\widehat{\eta})$, tenemos que

$$\widehat{\eta}_i \frac{f_i(x)}{\int_\Delta f_i(x)dx} \geq \widehat{\eta}_j \frac{f_j(x)}{\int_\Delta f_j(x)dx} \text{ para toda } x \in S$$

De aquí que

$$\widehat{\eta}_i m_i(S) = \widehat{\eta}_i \frac{\int_S f_i(x)dx}{\int_\Delta f_i(x)dx} \geq \widehat{\eta}_j \frac{\int_S f_j(x)dx}{\int_\Delta f_j(x)dx} = \widehat{\eta}_j m_j(S)$$

lo que completa la demostración. ■

Por simplicidad, denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de las $n-$particiones ordenadas $P_n(\Delta)$.

Definición 77 *Dada* $F \in \mathcal{P}$ *sea*

$$\Omega_k(F) = \{E \in \mathcal{P} : m_k(E_k) > m_k(F_k)\}$$

Esto significa que en $\Omega_k(F)$, están todas las particiones en las que el agente k mejora con respecto a la partición F, es decir, todas las particiones que el agente k prefiere a la partición F.

Antes de proceder con el teorema principal, demostraremos un lema que resultará útil para la demostración.

Lema 78 *Dada* $E \in \mathcal{P}$

$$\Omega_1(E) \cap \ldots \cap \Omega_n(E) = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow E = \arg\max_{F \in \mathcal{P}} \min\{m_1(F_1), \ldots, m_n(F_n)\}$$

Demostración. Supongamos que $\Omega_1(E) \cap \ldots \cap \Omega_n(E) = \emptyset$, entonces, para toda solución $F \in \mathcal{P}$, se tiene que existe $k \in N$ tal que $m_k(F_k) < m_k(E_k)$. Supongamos que $m_k(F_k) \geq \min\{m_1(E_1), \ldots, m_n(E_n)\}$, esto implica que $m_k(E_k) > \min\{m_1(E_1), \ldots, m_n(E_n)\}$, de donde existe un conjunto de medida positiva $S \subseteq E_k$ tal que $m_k(E_k) > m_k(E_k \setminus S) > m_k(F_k)$. Sabemos que podemos encontrar una $(n-1)-$partición $\{S_1, \ldots, S_{k-1}, S_{k+1}, \ldots, S_n\}$ de S de tal forma que cada elemento tenga medida positiva. Así, la partición

$$\{E_1 \cup S_1, \ldots, E_{k-1} \cup S_{k-1}, E_k \setminus S, E_{k+1} \cup S_{k+1}, \ldots, E_n \cup S_n\}$$

es preferida por todos y por lo tanto pertenece a $\Omega_1(E) \cap \ldots \cap \Omega_n(E)$ lo que es una contradicción.

Supongamos, ahora, que $E = \arg\max_{F \in \mathcal{P}} \min\{m_1(F_1), \ldots, m_n(F_n)\}$, y que existe una partición $F \in \mathcal{P}$ tal que $F \in \Omega_1(E) \cap \ldots \cap \Omega_n(E)$. Esto implica que $m_i(E_i) < m_i(F_i)$ para toda $i \in N$, pero esto es una contradicción, pues E era el maximin. ■

Teorema 79 *Sea* $\{f_i : i \in N\}$ *una familia genérica sobre* Δ*, si tomamos* $\widehat{\eta}$ *como en (3.2), entonces* $E(\widehat{\eta}) = (E_1(\widehat{\eta}), ..., E_n(\widehat{\eta}))$ *es una solución óptima de (3.1).*

Demostración. Supongamos que $\Omega_1(E(\widehat{\eta})) \cap \ldots \cap \Omega_n(E(\widehat{\eta})) \neq \emptyset$, y tomemos $F \in \mathcal{P}$ tal que

$$F \in \Omega_1(E(\widehat{\eta})) \cap \ldots \cap \Omega_n(E(\widehat{\eta}))$$

entonces

$$m_k(F_k) > m_k(E_k(\widehat{\eta})) \tag{3.3}$$

para cada $k \in N$.

Observemos que, dado que tanto F como $E(\eta)$ son particiones, podemos reescribirlas así:

$$\begin{aligned} m_k(F_k) &= \sum_{j\in N} m_k(F_k \cap E_j(\widehat{\eta})) \text{ y} \\ m_k(E_k(\widehat{\eta})) &= \sum_{j\in N} m_k(E_k(\widehat{\eta}) \cap F_j) \end{aligned} \tag{3.4}$$

De esta forma, por (3.3) y (3.4), se tiene que

$$\sum_{j\in N} \eta_k m_k(F_k \cap E_j(\widehat{\eta})) > \sum_{j\in N} \eta_k \mu_k(E_k(\widehat{\eta}) \cap F_j)$$

de donde, sumando sobre $k \in N$,

$$\sum_{k\in N}\sum_{j\in N} \eta_k \mu_k(F_k \cap E_j(\widehat{\eta})) > \sum_{k\in N}\sum_{j\in N} \eta_k \mu_k(E_k(\widehat{\eta}) \cap F_j)$$

y por la proposición anterior, como $E_k(\widehat{\eta}) \cap F_j \subseteq E_k(\widehat{\eta})$, cada $\eta_k\mu_k(E_k(\widehat{\eta}) \cap F_j)$ es mayor o igual que $\eta_j\mu_j(E_k(\widehat{\eta}) \cap F_j)$, por lo que

$$\sum_{k\in N}\sum_{j\in N} \eta_k \mu_k(E_k(\widehat{\eta}) \cap F_j) \geq \sum_{k\in N}\sum_{j\in N} \eta_j \mu_j(E_k(\widehat{\eta}) \cap F_j)$$

y, por lo tanto,

$$\sum_{k\in N}\sum_{j\in N} \eta_k \mu_k(F_k \cap E_j(\widehat{\eta})) > \sum_{k\in N}\sum_{j\in N} \eta_j \mu_j(E_k(\widehat{\eta}) \cap F_j)$$

lo cuál es una contradicción, pues ambos lados de la desigualdad son iguales. Y así, se tiene que $\Omega_1(E(\widehat{\eta})) \cap \ldots \cap \Omega_n(E(\widehat{\eta})) = \emptyset$ y por el lema anterior, se cumple (3.1). ∎

El teorema, tal como está escrito, no nos proporciona una idea clara de qué es lo que estamos obteniendo, para analizarlo observaremos las siguientes proposiciones.

Proposición 80 *Sea $\widehat{\eta}$ como en (3.2), entonces la solución $E(\widehat{\eta})$ es* óptima de Pareto*.*

Esto se sigue directo de la demostración.

Proposición 81 *Sea $\widehat{\eta}$ como en (3.2), entonces la solución $E(\widehat{\eta})$ es* equitativa*.*

Para esta demostración requerimos de un detalle técnico, la continuidad de $m_k(E_k(\eta))$ con respecto de la variable η. Este resultado está demostrado en el apéndice. Además, usaremos la siguiente notación:

Notación 82 *Para cada $\eta \in (n-1)$-simplejo, cada $k \in N$ y cada $d \in \mathbb{R}_+$, escribiremos*

$$\eta_{k,d} = \frac{(\eta_1 - d, ..., \eta_{k-1} - d, \eta_k + d, \eta_{k+1} - d, ..., \eta_n - d)}{\sum_{i \in N} \eta_i - (n-1)d} \tag{3.5}$$

Esto es, dada una η, $\eta_{k,d}$ representa un punto en el $(n-1)-$simplejo suficientemente cercano a η que, además, en cada entrada, η es mayor que $\eta_{k,d}$ excepto en la entrada k, en la que es menor.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que la solución $E(\widehat{\eta})$ no es equitativa. Esto es, existe $k \in N$ tal que $m_k(E_k(\widehat{\eta})) < m_i(E_i(\widehat{\eta}))$ para cada $i \neq k$.

Ahora, como $m_k(E_k(\eta))$ es una función continua de η, debe existir δ tal que $\min_{i \in N}\{\widehat{\eta}_i\} > \delta > 0$ de tal forma que

$$m_k(E_k(\widehat{\eta})) \leq m_k(E_k(\widehat{\eta}_{k,\delta})) < m_i(E_i(\widehat{\eta}_{k,\delta})) \leq m_i(E_i(\widehat{\eta}))$$

para cada $i \neq k$. Observemos que, dado que $\widehat{\eta}$ satisface (3.1), entonces $m_k(E_k(\widehat{\eta})) = m_k(E_k(\widehat{\eta}_{k,\delta}))$, lo que implica que

$$m_k(E_k(\widehat{\eta}_{k,\delta}) \backslash E_k(\widehat{\eta})) = 0$$

con $E_k(\widehat{\eta}) \subseteq E_k(\widehat{\eta}_{k,\delta})$.

Por las restricciones del problema (todo conjunto tal que $m_k(E_k) = 0$ debe ser de medida de Lebesgue cero), $\lambda(E_k(\widehat{\eta}_{k,\delta}) \backslash E_k(\widehat{\eta})) = 0$. Pero esto es una contradicción, por lo tanto la solución es equitativa. ■

Proposición 83 *Sea $\widehat{\eta}$ como en (3.2), entonces la solución $E(\widehat{\eta})$ es de* mínima justicia*.*

Demostración. Por el teorema de Neyman (ver sección 2.3.1), existe una partición $F \in \mathcal{P}$ tal que $m_i(F_j) = \frac{1}{n}$ para cada $i,j \in N$. Si $E(\widehat{\eta})$ no fuera una solución de *mínima justicia*, entonces, como es *equitativa*, se tiene que $m_i(E_i(\widehat{\eta})) < m_i(F_i) = \frac{1}{n}$ es cierta para toda $i \in N$. Pero esto es una contradicción pues $E(\widehat{\eta})$ es *óptima de Pareto.* ■

Es importante notar que, aunque este procedimiento sólo reconstruye la idea del GA hasta antes del paso de igualación, la solución resulta ser equitativa. La razón es gracias a la condición de familia genérica, que no se da en el caso discreto. De hecho se puede pensar que cuando en el GA se tienen k objetos a repartir, la familia de funciones $\{f_i\}_{i \in N}$ son funciones del intervalo $[0,1]$ a los reales, evaluadas constantes en los intervalos abiertos $(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$, donde $0 \leq i \leq n-1$, además de que $\int_0^1 f_i(x)dx = 100$.

Ejemplo 84 *Tenemos el problema de división justa* $(\{A, B\}, \{1, 2, 3, 4\})$*, y los agentes han repartido sus 100 puntos del GA de la siguiente forma.*

$\diagdown$	*Agente A*	*Agente B*
Objeto 1	10	23
Objeto 2	25	19
Objeto 3	20	16
Objeto 4	45	42

esto equivale a las funciones f_1 *y* f_2 *de las figuras siguientes*

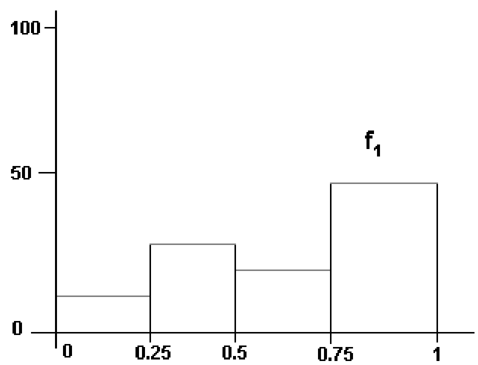


FIGURA 3.1. Función de valuación del agente A.

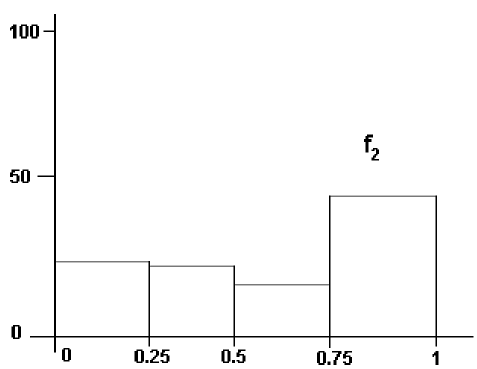


FIGURA 3.2. Función de valuación del agente B

El problema equivale a $(\{1, 2\}, [0, 1], \{f_1, f_2\})$*, y encontrar* η *óptima que satisfaga (3.2). Claramente, las funciones* f_1 *y* f_2 *no satisfacen la condición de ser familia* *genérica sobre* $[0, 1]$ *y por ello* $E(\widehat{\eta})$ *no es equitativa. De hecho,* $E(\widehat{\eta}) = ([0.25, 1], [0, 0.25] \cup [0.75, 1])$*, que claramente no es partición válida pues su intersección es* $[0.75, 1]$.

Además, en teoría es posible hablar de $E(\widehat{\eta})$ aún cuando no se cumpla la condición de familia genérica, resolviendo el problema de las intersecciones $E_i(\widehat{\eta}) \cap E_j(\widehat{\eta})$ con medida positiva de manera semejante al paso de igualación del procedimiento del GA, pero ese paso es complicado y no se abordará en esta tesis.

3.3 El Caso Pesado

En esta sección generalizaremos el teorema de la sección pasada para el caso en el que los agentes tienen derechos distintos sobre Δ. Para ello, necesitamos la definición de vector de pesos que se dio en la sección de *Mejor Postor y Compensación Monetaria* del capítulo anterior. Además, necesitaremos redefinir las nociones de solución de mínima justicia y equitativa para este problema.

Por un *problema pesado de división justa* entenderemos un vector $(\Delta, N, \alpha, \{f_i\}_{i \in N})$, donde N, Δ y $\{f_i\}_{i \in N}$ se definen como antes, y α es un vector de pesos (ver definición 49). α_i se interpreta como el porcentaje de Δ al que tiene derecho el agente i. Si Δ y N son claras por contexto, simplemente usaremos $(\alpha, \{f_i\}_{i \in N})$ por brevedad.

Definición 85 *Una partición* $F \in \mathcal{P}$ *se dice que es solución* $\alpha-$equitativa *si y sólo si* $\frac{m_i(F_i)}{\alpha_i} = \frac{m_j(F_j)}{\alpha_j}$ *para cada* $i, j \in N$.

Definición 86 *Una partición* $F \in \mathcal{P}$ *se dice que es solución de* $\alpha-$mínima justicia *si y sólo si* $\mu_i(F_i) \geq \alpha_i$.

Observemos que la definición de óptima de Pareto no cambia por el hecho de tener diferentes derechos para cada agente.

Como antes, la solución debe maximizar el mínimo porcentaje, pero en este caso, ese porcentaje está pesado por el derecho que le corresponde al agente

$$\max_{F \in \mathcal{P}} \min\{\frac{m_i(F_i)}{\alpha_i} : i \in N\} \tag{3.6}$$

La proporción en la que reciben su asignación debe ser la misma que el derecho que tienen sobre Δ, si la solución resultara ser $\alpha-$*equitativa*. Así, tenemos, como antes, nuestro candidato de solución

$$\widehat{\eta} = \arg\max_{\eta \in \mathbb{R}_+} \min\{\frac{m_i(E_i(\widehat{\eta}))}{\alpha_i} : i \in N\} \tag{3.7}$$

Teorema 87 *Sea* $\{f_i : i \in N\}$ *es una familia genérica sobre* Δ *y* α *un vector de pesos, si tomamos* $\widehat{\eta}$ *como en (3.7), entonces* $E(\widehat{\eta})$ *es una solución óptima de (3.6).*

La demostración es similar a la del teorema de la sección anterior y se le deja al lector. Como antes, resulta que la solución $E(\widehat{\eta})$ es $\alpha-$equitativa y de $\alpha-$mínima justicia, además, igualmente, óptima de Pareto.

Ahora vamos a establecer una relación con un objeto matemático analizado anteriormente, el IPS de Barbanel. Como el lector pudo verificar en la sección de *Otros Teoremas de División Justa* en el capítulo anterior, las soluciones óptimas de Pareto pertenecen al IPS^{out}, y dado que con el teorema anterior estamos encontrando una solución óptima de Pareto para cada vector de pesos, es pertinente preguntarnos si ambos conjuntos son iguales. Entes de establecer esta relación observemos las propiedades que tienen las medidas m_i.

Por la forma en como están construidas las medidas m_i, es claro que son contablemente aditivas, no atómicas y que son medidas de probabilidad. Recordemos que estas son las condiciones necesarias para la mayoría de los teoremas de existencia. Sin embargo, además de estas propiedades, nuestras medidas tienen otra propiedad que es la condición que hacía falta para establecer la relación entre IPS^{out} y $\{m(E(\widehat{\eta})) : E(\widehat{\eta})$ es solución óptima del problema $(\alpha, \{f_i\}_{i\in N})\}$.

Definición 88 *Se dice que las medidas* $\{m_i\}_{i\in N}$ *son* absolutamente continuas con respecto a las demás *si y sólo si siempre que un subconjunto* Δ *es de medida cero con respecto a una medida, se tiene que es de medida cero con respecto a todas las medidas.*

Proposición 89 *Si* $\{f_i : i \in N\}$ *es una familia genérica sobre* Δ *y las medidas* m_i *son absolutamente continuas con respecto a las demás, entonces* $IPS^{out} = \{m(E(\widehat{\eta})) :$ $E(\widehat{\eta})$ *es solución óptima de* $(\alpha, \{f_i\}_{i\in N})$ *para cada* α *vector de pesos*$\}$.

Demostración. Se puede observar que si m_i son absolutamente continuas con respecto a las demás, entonces IPS^{out} es exactamente igual al conjunto de todas las soluciones óptimas de Pareto.

Como el IPS es convexo y contenido en $[0,1]^n$, podemos parametrizar IPS^{out} con α en el $(n-1)-$simplejo con vértices en $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $(0,0,\ldots,1)$, por medio del rayo que parte del origen hacia α y que intersecta una y sólo una vez a IPS^{out}.

Por otro lado, si $\widehat{\eta}$ está dada por (3.7), entonces $E(\widehat{\eta})$ es la solución óptima de $(\alpha, \{f_i\}_{i\in N})$, y además, ese punto de intersección resulta ser precisamente $m(E(\widehat{\eta}))$, pues $E(\widehat{\eta})$ es $\alpha-$equitativa (lo que implica que existe una constante $\gamma > 0$ tal que $m_i(E(\widehat{\eta})) = \gamma\alpha_i$ para toda $i \in N$). En consecuencia, estos dos conjuntos son idénticos. ■

Si, como en el capítulo anterior, tenemos que las preferencias están dadas de manera que $A \succeq_i B$ si y sólo si $m_i(A) \leq m_i(B)$, entonces se tiene que $IPS^{in} = \{m(E(\widehat{\eta})) : E(\widehat{\eta})$ es solución óptima de $(\alpha, \{f_i\}_{i\in N})$ para cada α vector de pesos$\}$.

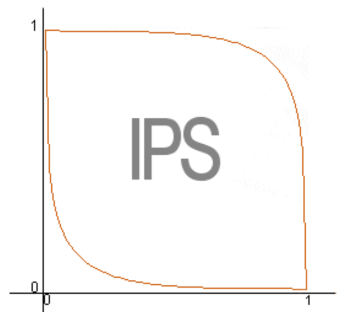


FIGURA 3.3. IPS generado mediante $\{m(E(\widehat{\eta})) : E(\widehat{\eta})$ solución de $(\alpha, \{f_i\}_{i\in N})\}$

En la figura 3.3 se observa un IPS reconstruido a partir del conjunto de soluciones al problema pesado de división justa $(\{1,2\}, [0,1], \alpha, \{x^2, (1-x)^2\})$ para cada α vector de pesos.

Es decir, que el teorema anterior podría servir como herramienta para entender mejor al IPS cuando se tienen más de dos agentes, imponiendo algunas restricciones a las medidas m_i, como la necesidad de contar con densidad en el sentido de probabilidad (la función f_i se puede ver como la densidad de una función de probabilidad m_i). Pero más aún, el teorema nos dice que estamos encontrando todas las posibles soluciones óptimas de Pareto de un problema dado, y además, el encontrar la solución es lo mismo que optimizar (maximizar) una función real con dominio en el $(n-1)-$simplejo. Estos detalles los veremos en la siguiente sección, donde daremos la forma de implementar este problema computacionalmente.

3.4 Implementación

Digamos que tomamos la función $g(\eta) = \min_{i\in N}\{m_i(E_i(\eta))\}$, resolver el problema pesado de división justa $(\alpha, \{f_i\}_{i\in N})$ se reduce a resolver el problema de optimización

$$\text{Maximizar } g(\eta) \text{ donde } \eta \in (n-1) - \text{simplejo}$$

Observemos que el caso sin pesar es un caso particular del pesado, por eso el enfoque se hará teniendo en cuenta el problema con distintos derechos.

Para resolver este problema, se puede utilizar cualquier técnica de optimización tradicional, en el caso de la presente tesis, se decidió utilizar un algoritmo genético para encontrar el máximo de la función g. Dado que un problema resuelto de manera numérica es, necesariamente, finito, se decidió fragmentar el conjunto Δ en $M >> 0$ trozos de igual medida de Lebesgue. La asignación de la partición para cada η, es equivalente a asignar cada trozo al agente i que cumpla que

$$\eta_i \frac{f_i(x)}{\int_\Delta f_i(x)dx} \geq \eta_j \frac{f_j(x)}{\int_\Delta f_j(x)dx} \text{ para toda } j \in N$$

De esta forma podemos evaluar la función g de manera numérica con la precisión dependiendo del tamaño del número M.

De manera general, un algoritmo genético está representado por el siguiente pseudocódigo.

Algoritmo 90 *Algoritmo Genético Estándar, la constante TG indica el número total de generaciones que el algoritmo buscará la solución.*

```
void genetic()
{
   Individuo ind[] = initializePoblation();
   for( int generacion = 0; generacion < TG; generacion++ )
   {
      if( buenaSolucion( ind ) )
         break;
      cruza( ind );
      muta( ind );
      selecciona( ind );
   }
}
```

Los individuos son arreglos de valores, usualmente en el conjunto $\{0, 1\}$, o valores reales. Para este problema se utilizaron L individuos.

La función *cruza(ind)* indica un procedimiento de cruza que usualmente es, a partir de dos padres (individuos) obtener dos hijos (nuevos individuos). La forma de escoger los padres depende de la implementación particular del algoritmo genético. Puede ser desde una probabilidad uniforme sobre la población, o proporcional a su aptitud.

En la función *muta(ind)* indica el procedimiento de mutación en el que se escogen (pocos) individuos y se les cambia de forma aleatoria alguno de sus genes (i.e. un elemento del arreglo se cambia aleatoriamente a un valor escogido de forma aleatoria).

Finalmente la selección se lleva a cabo en la función *selecciona(ind)*, que consiste en seleccionar los individuos que formarán parte de la siguiente generación. Esto se puede realizar por torneo (i.e. tomar dos individuos al azar e insertar al mejor en la siguiente generación) o por ruleta (i.e. tomar un individuo con probabilidad proporcional a su función de aptitud).

Para este problema se usó la cruza aritmética, detallada a continuación.

Algoritmo 91 *Función de Cruza Aritmética*

```
void cross( Individuo p0, Individuo p1, Individuo hijo )
{
    double cut = random()*2 − 0.5;
    for( int i = 0; i < p0.size(); i++ )
        hijo[i] = cut * p0[i] + (1 − cut) * p1[i];
}
```

Se usó, también, la mutación usual, entre valores de $[0,1]$. Además, se genera una cantidad fija de hijos, que son agregados a la población inicial (a este tipo de algoritmo de le denomina $\mu+\lambda$). La selección simplemente ordena a la nueva población de padres e hijos y conserva a los mejores L, de tal forma que el tamaño de la población siempre es L al inicio de cada generación.

Tenemos a continuación, en pseudo-código, la función de evaluación de un individuo (η) típico de la población, y posteriormente la función que regresa la partición dado un individuo (η). K es el número de intervalos en los que está dividido $\Delta = [0,1]$. Tenemos además la partición de Δ, $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.

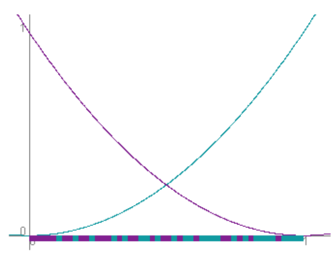
Algoritmo 92 *Evaluación de la aptitud de un individuo*

```
double getFitness( double η[] )
{
    Partition E = getPartition( η );
    double m[] = new double[n];
    for( int i = 0; i < K; i++ )
        m_i(E_i) += f_{particion[i]}(i) / ∫_Δ f_{particion[i]};
    return min_{i∈N}{m_i(E_i)};
}
Partition getPartition( double η[] )
{
    for( int i = 0; i < K; i++ )
    {
        int k = 0;
        double max = 0;
        for( int j = 0; j < agents; j++ )
            if( f_j(P_i) * η_j > max )
            {
                max = f_j(P_i) * η_j;
```

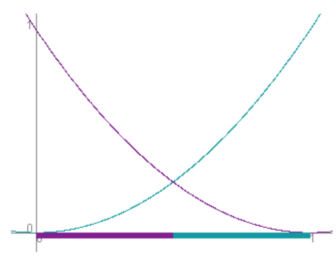
```
            k = j;
        }
        E_k = E_k ∪ P_i;
    }
    return E;
}
```

La función *getFitness(η)* obtiene la aptitud asignada a cada individuo η, utilizada en el proceso de selección. En este paso se llama a la función *getPartition(η)* para que construya la partición $E(\eta)$ de Δ asociada a cada η. De aquí se calcula, con las medidas m_i, la aptitud del individuo, que corresponde a la función $\min_{i\in N}\{m_i(E_i(\eta))\}$.

A continuación tenemos una comparación de la mejor partición obtenida del problema $(\{1,2\},[0,1],\{x^2,(1-x)^2\})$ con un algoritmo genético simple sobre el espacio de búsqueda $P_n(\Delta)$ y el algoritmo genético arriba mencionado sobre el $(n-1)-$simplejo. La partición está representada en el eje x.



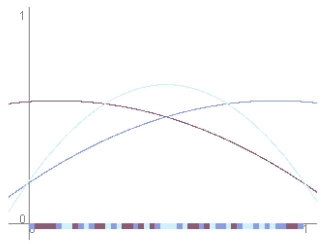
Algoritmo aplicado directamente



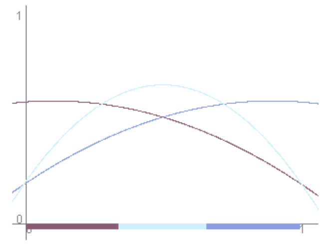
Algoritmo aplicado a $E(\eta)$

En la izquierda, el mínimo porcentaje es 69%, mientras que en la derecha es 88%, pero una de las características más interesantes se aprecia cuando se aumenta el número de agentes.

Para este caso utilizamos 3 agentes, y las funciones $f_1(x) = 0.3(x+1)(1.2-x)$, $f_2(x) = 0.3(x-2)(x+0.2)$ y $f_3(x) = 1.9(x-1.1)(x+0.1)$. Con la búsqueda parcial en $P_n(\Delta)$ se obtiene el porcentaje de 35%, mientras que con la búsqueda en el $(n-1)-$simplejo se obtiene 40.65%, pero, aún si la diferencia de porcentaje no es mucha, además, se observa que los trozos asignados en el segundo caso son mucho *mejores* en el sentido de que están compuestos de un sólo trozo, mientras que en la izquierda se componen de trozos muy lejanos en Δ.



Algoritmo aplicado directamente



Algoritmo aplicado a $E(\eta)$

Se puede utilizar otro algoritmo de búsqueda de óptimos de funciones para resolver este problema, sin embargo, aquí se utilizó el algoritmo genético por su rápida convergencia a soluciones cercanas al óptimo global, así como su capacidad de encontrar el óptimo global con probabilidad 1, en tiempos suficientemente grandes.

4

Conclusiones

Hemos explorado diversos resultados de división justa, para dos o más agentes. El común denominador resultan ser las condiciones que se han de sacrificar en pos de la generalidad.

Mientras más complejo es el conjunto Δ, las soluciones se vuelven más complicadas de calcular u obtener, y en el caso de los esquemas de cuchillos móviles, aún cuando los procedimientos son relativamente simples para pocos agentes, su complejidad aumenta enormemente con más de tres agentes. Además, no existen esquemas de cuchillos que brinden soluciones óptimas de Pareto, más bien están enfocados en buscar mínima justicia o libertad de envidias.

Cuando se tienen objetos discretos, en contraste, los métodos de asignación son relativamente fáciles de calcular, sin embargo, se plantea el problema de qué hacer cuando no se puede asignar a cada agente la misma cantidad de objetos, o el mismo porcentaje. En la mayoría de los casos se establece un factor externo, como compensación monetaria o la venta de el o los artículos en disputa. En muchas ocasiones de la vida real, sin embargo, los agentes aprecian los objetos como unidad y no desean venderlos o compartirlos.

Todo ello nos lleva directamente al tercer capítulo, en el que se plantea una generalización del procedimiento para dos agentes que más propiedades de justicia abarca. Aunque la complejidad de cálculo es mayor que en el caso de los esquemas de cuchillos móviles y el mismo procedimiento del Ganador Ajustado, se tiene una solución computacionalmente posible, que además resulta ser la búsqueda en el mínimo espacio esperado para resolver todos los problemas de división justa del tipo

$(\{1, 2, \dots, n\}, \Delta, \alpha, \{f_i\}_{1\leq i\leq n})$, es decir, como sabemos que el IPS^{out} es exactamente igual al conjunto de soluciones, queda intuitivamente definida la búsqueda de la solución entre los posibles puntos del IPS^{out}. Recordemos que esto lo logramos parametrizando con el $(n-1)-$simplejo. Esto implica una correspondencia entre el $(n-1)-$simplejo y las soluciones propuestas por la generalización del GA.

Matemáticamente, además, se encontró que basta realizar una dinámica del mejor postor, siempre y cuando se reescalen las ofertas realizadas por los agentes. Se propuso una solución que posiblemente en el futuro pueda ser calculada de forma determinista, es decir, encontrar de manera algebráica la η en el $(n-1)-$simplejo tal que $E(\eta)$ sea solución del *maximin* (3.1) ó (3.6).

Apéndice

Continuidad

Recordemos que para que la solución dada por el teorema 79 sea equitativa, requerimos que la función $m_i(E_i(\eta))$ sea continua como función de η. Esto era, en parte, porque cuando la condición de familia genérica sobre Δ no se da, entonces $E(\eta)$ no es una partición válida.

A continuación demostraremos que continuidad implica que $E(\eta)$ es familia genérica. Antes, haremos una observación que resultará útil más adelante. Si $|\eta - \eta'| < d$, entonces, para cada $k \in N$ tenemos que $|\eta_k - \eta'_k| < d$. Es decir, si dos puntos en el $(n-1)-$simplejo tienen distancia menor que d, entonces cada una de sus entradas tiene distancia menor que d.

Lema 93 *Si tomamos $\eta_{k,d}$ como en (3.5), de forma que $\min_{j\in N} \eta_j < d < \max_{j\in N} \eta_j$. Si $|\eta - \eta'| < d$, entonces*

$$E_k(\eta_{k,-d}) \subseteq E_k(\eta) \subseteq E_k(\eta_{k,d}) \quad y \quad E_k(\eta_{k,-d}) \subseteq E_k(\eta') \subseteq E_k(\eta_{k,d})$$

Demostración. Primero observemos que si $x \in E_k(\eta_{k,-d})$, entonces

$$(\eta_k - d)\frac{f_k(x)}{\int_\Delta f_k(x)dx} \geq (\eta_j + d)\frac{f_j(x)}{\int_\Delta f_j(x)dx}$$

para toda $j \in N$, y de aquí, se tiene que

$$(\eta_k)\frac{f_k(x)}{\int_\Delta f_k(x)dx} \geq (\eta_j)\frac{f_j(x)}{\int_\Delta f_j(x)dx}$$

que a su vez implica que

$$(\eta_k + d)\frac{f_k(x)}{\int_\Delta f_k(x)dx} \geq (\eta_j - d)\frac{f_j(x)}{\int_\Delta f_j(x)dx}$$

pues se tiene que $\eta_k - d < \eta_k < \eta_k + d$ y $\eta_j + d < \eta_j < \eta_j - d$ para cada $j \in N$. Esto implica, finalmente, que $E_k(\eta_{k,-d}) \subseteq E_k(\eta) \subseteq E_k(\eta_{k,d})$.

Por otro lado, dado que $|\eta - \eta'| < d$, entonces $|\eta_i - \eta_i'| < d$ para cada $i \in N$, y así, $\eta_k - d < \eta_k' < \eta_k + d$ y $\eta_j + d < \eta_j' < \eta_j - d$. Y de la misma forma que arriba, se tiene la otra identidad $E_k(\eta_{k,-d}) \subseteq E_k(\eta') \subseteq E_k(\eta_{k,d})$. $\blacksquare$

Demostración de la Continuidad

Para demostrar la continuidad, primero necesitamos una definición.

Definición 94 *Dada η en el $(n-1)-$simplejo, definimos*

$$A_{i,j}(\eta) = \{x \in \Delta : \eta_i \frac{f_i(x)}{\int_\Delta f_i(x)dx} = \eta_j \frac{f_j(x)}{\int_\Delta f_j(x)dx}\}$$

Es decir, $A_{i,j}(\eta)$ representa todo lugar en el que f_i es un escalar multiplicado por f_j. En particular, f_i y f_j son linealmente dependientes en $A_{i,j}(\eta)$. Por otro lado, $A_{i,j}(\eta)$, se puede pensar como las condiciones de frontera de $E_i(\eta)$. Resulta ser que la frontera de $E_i(\eta)$ es, efectivamente, un subconjunto de $A_{i,j}(\eta)$. De esta forma, si $A_{i,j}(\eta)$ tiene medida cero, claramente $\partial E_i(\eta)$ también tiene medida cero. Podemos reescribir la definición de familia genérica en términos de $A_{i,j}$.

Definición 95 *Diremos que $\{f_i : \Delta \to \mathbb{R}\}_{i \in N}$ es una* familia genérica sobre Δ *si y sólo si $\lambda(A_{i,j}(\eta)) = 0$ para cada $i, j \in N$ y η en el $(n-1)-$simplejo.*

Ahora proseguimos con la demostración de la continuidad.

Demostración. El lema 93 implica que

$$m_k(E_k(\eta_{k,-d})) \leq m_k(E_k(\eta)) \leq m_k(E_k(\eta_{k,d}))$$

y

$$m_k(E_k(\eta_{k,-d})) \leq m_k(E_k(\eta')) \leq m_k(E_k(\eta_{k,d}))$$

Claramente, como tenemos que $E_k(\eta_{k,-d}) \subseteq E_k(\eta_{k,d})$, y, dado que m_k es contablemente aditiva, tenemos que

$$m_k(E_k(\eta_{k,d})) - m_k(E_k(\eta_{k,-d})) = m_k(E_k(\eta_{k,d}) \backslash E_k(\eta_{k,-d}))$$

Por otro lado, observemos que

$$E_k(\eta_{k,d}) \backslash E_k(\eta_{k,-d}) = \cup_{-d<e\leq d}[\cup_{i\neq k} A_{k,i}(\eta_{k,e}) \cap E_k(\eta_{k,e})]$$

sin embargo, como $\{f_i\}_{i\in N}$ es una familia genérica sobre Δ, se tiene que $A_{k,i}(\eta_{k,e}) \cap E_k(\eta_{k,e})$ debe ser de medida cero para toda $i \neq k$. Por lo tanto, $\lambda(E_k(\eta_{k,d}) \backslash E_k(\eta_{k,-d}))$ tiende a cero cuando d tiende a cero. Además, se tiene que $\{f_i\}_{i\in N}$ está acotada en toda Δ por ser compacto, de aquí que $m_k(E_k(\eta_{k,d})) - m_k(E_k(\eta_{k,-d}))$ tienda a cero cuando d tiende a cero, y así, la continuidad se da. ■

Notemos que para el caso pesado, la continuidad también se necesita, pero no es necesario hacer ninguna modificación al teorema anterior.

Apéndice

Referencias

[B1] J. Barbanel, *On the Geometry of Cake Division*, Journal of Math. Anal. and Appl. 264 (2001), pags. 639-356.

[B2] J.Barbanel, *Super envy-free Cake Division and Independence of Measures*, Journal of Math. Anal. and Appl. 197 (1996), pags. 54-60.

[Bo] V. Boltyanski, *Geometric Methods and Optimization Problems* (1999), Dordrecht: Kluwer Academic Pub. Combinatorial Optimization; 4.

[BEF] S. Brams, P. Edelman, P. Fishburn, *Paradoxes of Fair Division*, Economic Research Reports (2000), RR#: 2000-13.

[BT] S. Brams, A. Taylor, *The Win-Win Solution*, W. W. Norton & Company (2000), libro.

[BTZ] S. Brams, A. Taylor, W. Zwicker, *Old and New Moving-Knife Schemes*, The Mathematical Intelligencer, vol. 17 #4 (1995), pags. 30-35.

[DWW] A. Dvoretsky, A. Wals, J. Wolfovitz, *Relations among cetain ranges of vector measures*, Pacific Jour. Math. 1 (1951), pags. 59-74.

[L] A. Lyapounov, *Sur les fonctions-vecteurs complement additives*, Bull. Acad. Sci. (URSS) 6 (1940), pags. 465-478.

Referencias

[N] J. Neyman, *Un théorème d'existence*, C.R. Acad. Sci. Paris 222 (1946), pags. 843-845.

[S] F. Sanchez, *About inheritance distribution*, Journal of Math. Econ. 37 (2002), pags. 297-309.